

Ratkaisut, Cadet, 8. ja 9. luokka



3 pistettä

Kysymys	1	2	3	4	5	6	7
Vastaus	D	D	E	E	E	A	D

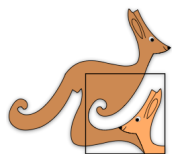
4 pistettä

Kysymys	8	9	10	11	12	13	14
Vastaus	D	A	D	B	B	B	A

5 pistettä

Kysymys	15	16	17	18	19	20	21
Vastaus	E	E	B	C	D	D	C

Kengurulogon 2020 suunnitteli Matias McAteer



Association Kangourou  
sans Frontières

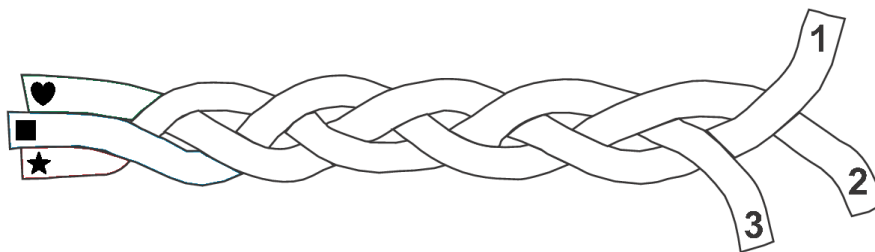


Maunulan yhteiskoulu  
HELSINGIN MATEMATIIKKALUKIO



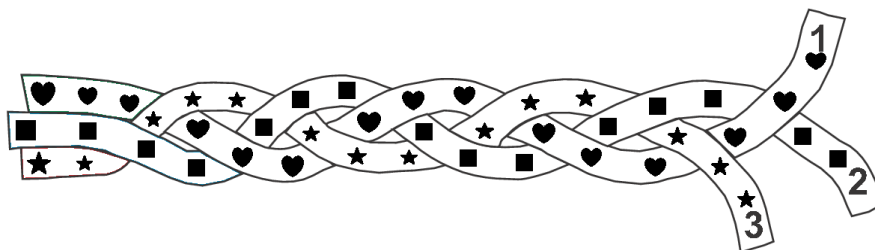


1. Kolme nauhaa on letitetty kuten kuvassa. Nauhat on merkitty kuvioilla: sydämellä, neliöllä ja tähdellä. Mikä numero vastaa mitäkin kuviota?

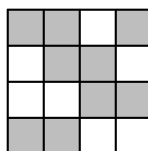


- A) 1 on neliö, 2 on sydän ja 3 on tähti  
B) 1 on sydän, 2 on tähti ja 3 on neliö  
C) 1 on tähti, 2 on neliö ja 3 on sydän  
D) 1 on sydän, 2 on neliö ja 3 on tähti  
E) 1 on neliö, 2 on tähti ja 3 on sydän

**Ratkaisu.** Piirtämällä selviää, että oikea vastaus on D.



2. Suuri neliö koostuu pienemmistä neliöistä, jotka ovat joko valkoisia tai harmaita.



Miltä suuri neliö näyttää, jos valkoisten ja harmaiden neliöiden värit vaihdetaan keskenään?

- A)
- B)
- C)
- D)
- E)

**Ratkaisu.** Ensin kannattaa tarkastella nurkissa sijaitsevien pikkuneliöiden värejä. Koska alkuperäisessä neliössä harmaita nurkkapaloja on kolme ja valkoisia yksi, on vaihtamisen jälkeen harmaita oltava yksi ja valkoisia kolme. Näin ainakaan vaihtoehdot A tai C eivät ole oikeita.

Kun tarkastellaan reunalla sijaitsevia neliöitä, huomataan, että alkuperäisessä kuviossa ei reunalla ole missään kohtaa enempää kuin kaksi vierekkäistä saman väristä pikkuneliötä. Koska sekä vaihtoehdossa B että vaihtoehdossa E on kolme vierekkäistä harmaata reunaneliötä, eivät ne voi olla oikein. Ainoaksi vaihtoehdoksi jää vaihtoehto D. Vertaamalla tätä alkuperäiseen kuvioon huomataan, että se on käänteisiä värejä lukuunottamatta sama kuin alkuperäinen, joten vaihtoehto D on oikein.



**3.** Jalkapalloturnauksessa on 4 joukkuetta. Jokainen joukkue pelaa jokaista muuta joukkuetta vastaan täsmälleen kerran. Jokaisessa ottelussa voittaja saa 3 pistettä ja häviö 0 pistettä. Jos peli päättyy tasan, molemmat joukkueet saavat 1 pisteen.

Mitä pistemäärää millään joukkueella ei voi olla, kun kaikki ottelut on pelattu?

- A) 4                      B) 5                      C) 6                      D) 7                      E) 8

**Ratkaisu.** Jokainen joukkue pelaa 3 peliä. Pisteitä voi saada jokaisesta pelistä joko 3, 1 tai 0. Jos joukkue voittaa kaikki pelit, se saa  $3 \cdot 3 = 9$  pistettä. Jos joukkue voittaa kaksi peliä ja pelaa yhden tasapelin, se saa  $2 \cdot 3 + 1 = 7$  pistettä. Koska nämä ovat joukkueen pisteiden kannalta kaksi parasta vaihtoehtoa, voidaan jo nyt päätellä, että mikään joukkue ei voi saada 8 pistettä eli vaihtoehto E on oikein.

Tarkistetaan vielä, että muiden vaihtoehtojen pisteet ovat mahdollisia:

Jos joukkue voittaa kaksi peliä ja häviää yhden, se saa  $2 \cdot 3 + 0 = 6$  pistettä.

Jos joukkue voittaa yhden pelin ja pelaa kaksi tasapeliä, se saa  $3 + 2 \cdot 1 = 5$  pistettä.

Jos joukkue voittaa yhden pelin, pelaa yhden tasapelin ja häviää yhden pelin, se saa  $3 + 1 + 0 = 4$  pistettä.

Jos joukkue voittaa yhden pelin ja häviää kaksi peliä, se saa  $3 + 2 \cdot 0 = 3$  pistettä.

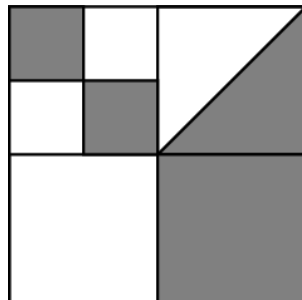
Jos joukkue pelaa kaikki pelit tasan, se saa  $3 \cdot 1 = 3$  pistettä.

Jos joukkue pelaa kaksi tasapeliä ja häviää yhden pelin, se saa  $2 \cdot 1 + 0 = 2$  pistettä.

Jos joukkue pelaa yhden tasapelin ja häviää kaksi peliä, se saa  $1 + 2 \cdot 0 = 1$  pistettä.

Jos joukkue häviää kaikki pelit, se saa 0 pistettä.

**4.** Iso neliö jaetaan pienemmiksi neliöiksi. Yksi neliö jaetaan vinottain kahteen osaan. Kuinka suuri osa isosta neliöstä on varjostettu?



- A)  $\frac{4}{5}$                       B)  $\frac{3}{8}$                       C)  $\frac{4}{9}$                       D)  $\frac{1}{3}$                       E)  $\frac{1}{2}$

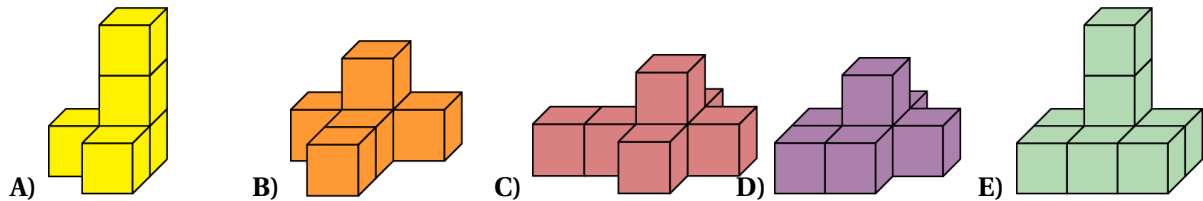
**Ratkaisu.** Iso neliö on jaettu neljään yhtä suureen neliöön, joista yksi on varjostettu kokonaan eli nyt isosta neliöstä on varjostettu  $\frac{1}{4}$ . Varjostetun neliön yläpuolella olevasta neliöstä on varjostettu puolet, joten tämän osuus isosta neliöstä on  $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$ . Vasemman yläkulman neliöstä on myös varjostettu puolet, joten tämän osuus isosta neliöstä on  $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$ . Lasketaan nämä varjostetut osat yhteen:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4} + \frac{2}{8} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

eli oikea vastaus on E.



5. Kuutioista on pinottu erilaisia rakennelmia. Missä rakennelmassa on eniten kuutioita?



**Ratkaisu.** a) Kappaleen pohjalla on 3 kuutiota, joiden päällä on 2 kuutiota, yhteensä siis 5 kuutiota.  
 b) Kappaleen pohjalla on 5 kuutiota, joiden päällä on 1 kuutio, yhteensä siis 6 kuutiota.  
 c) Kappaleen pohjalla on 6 kuutiota, joiden päällä on 1 kuutio, yhteensä siis 7 kuutiota.  
 d) Kappaleen pohjalla on 6 kuutiota, joiden päällä on 1 kuutio, yhteensä siis 7 kuutiota.  
 e) Kappaleen pohjalla on 6 kuutiota, joiden päällä on 2 kuutiota, yhteensä siis 8 kuutiota. Tämä on suurin kuutioiden lukumäärä, joten oikea vastaus on E.

6. Millä murtolausekkeella on suurin arvo?

A)  $\frac{8+5}{3}$

B)  $\frac{8}{3+5}$

C)  $\frac{3+5}{8}$

D)  $\frac{8+3}{5}$

E)  $\frac{3}{8+5}$

**Ratkaisu.** a)  $\frac{8+5}{3} = \frac{13}{3} = 4\frac{1}{3}$

b)  $\frac{8}{3+5} = \frac{8}{13}$

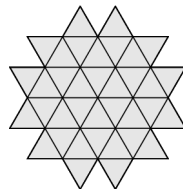
c)  $\frac{3+5}{8} = \frac{8}{8} = 1$

d)  $\frac{8+3}{5} = \frac{11}{5} = 2\frac{1}{5}$

e)  $\frac{3}{8+5} = \frac{3}{13}$

Näitä luvuista  $4\frac{1}{3}$  on suurin, joten oikea vastaus on A.

7. Kuvan kuvio on muodostettu 36 samanlaisesta pienestä tasasivuisesta kolmiosta. Kuinka monta pientä kolmiota pitää vähintään kuvioon lisätä, jotta kuvioista tulisi säännöllinen kuusikulmio?



A) 10

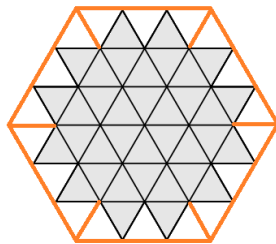
B) 12

C) 15

D) 18

E) 24

**Ratkaisu.** Kuvion ulkoreunalla on 12 pientä kolmiota, jotka muodostavat kuvion kärjet. Jos näiden kolmioiden väleihin laitetaan pikkukolmioita, saadaan säännöllinen kuusikulmio. Joka toiseen väliin mahtuu 1 kolmio ja joka toiseen väliin 2 kolmiota, yhteensä tarvitaan  $6 + 12 = 18$  kolmiota. Oikea vastaus on siis D.

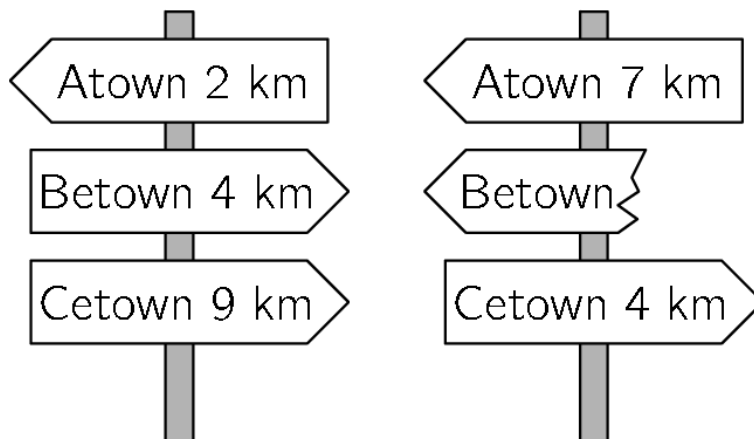


**8.** Jos Jenna menee kouluun bussilla ja kävelee kotiin, kuluu aikaa yhteensä 3 tuntia. Jos hän menee molempiin suuntiin bussilla, aikaa kuluu 1 tunti. Kuinka kauan aikaa kuluu, jos Jenna kävelee molempiin suuntiin?

- A) 3,5 tuntia      B) 4 tuntia      C) 4,5 tuntia      D) 5 tuntia      E) 5,5 tuntia

**Ratkaisu.** Kun Jonna kulkee molemmat matkat bussilla, aikaa kuluu 1 tunti eli bussimatka yhteen suuntaan vie puoli tuntia. Koska bussimatka yhteen suuntaan ja kävely toiseen vie yhteensä 3 tuntia, saadaan kävelyn osuudeksi 2,5 tuntia. Tämän perusteella kävely molempiin suuntiin vie aikaa 5 tuntia. Siispä oikea vastaus on D.

**9.** Lyhyin polku Atownista Cetowniin kulkee Betownin kautta. Polun varrella on kaksi tienviittaa. Mikä etäisyys on ollut kirjoitettuna rikkoutuneessa kyltissä?



- A) 1 km      B) 3 km      C) 4 km      D) 5 km      E) 9 km

**Ratkaisu.** Ensimmäinen tienviitta on Atownin ja Betownin välillä ja koska tienviitalta on 2 km Atowniin ja 4 km Betowniin, on matka Atownista Betowniin  $2 \text{ km} + 4 \text{ km} = 6 \text{ km}$ .

Toinen tienviitta on Betownin ja Cetownin välillä. Matka tienviitalta Atowniin on 7 km, joten tienviitalta on matkaa Betowniin

$$7 \text{ km} - 6 \text{ km} = 1 \text{ km}.$$

Siten vastaus on A.

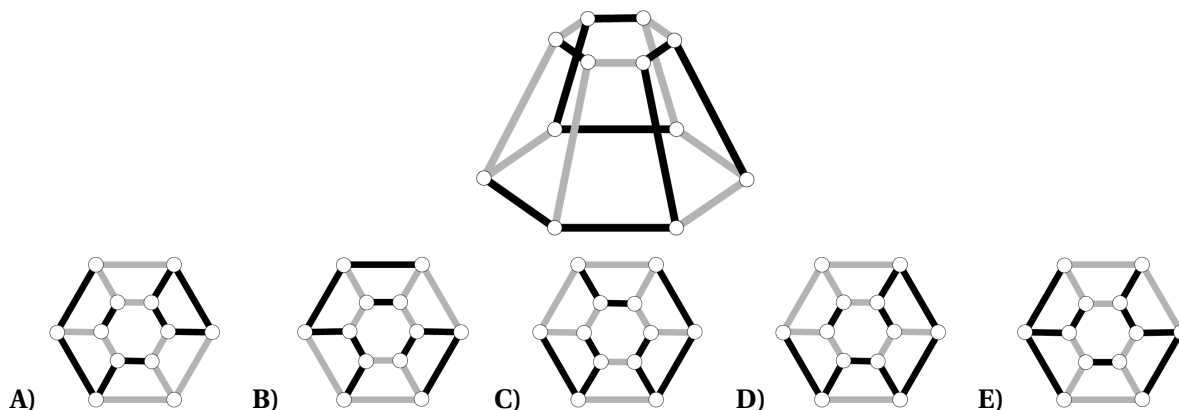
**10.** Vernerin palkka on 20 % hänen pomonsa palkasta. Kuinka monta prosenttia Vernerin palkkaa pitäisi nostaa, jotta Verner saisi palkkaa yhtä paljon kuin pomo?

- A) 80 %      B) 120 %      C) 180 %      D) 400 %      E) 520 %

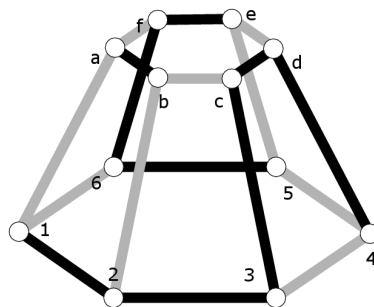


**Ratkaisu.** Vernerin palkka on 20 % eli viidesosa pomon palkasta, joten pomon palkka on 5-kertainen Vernerin palkkaan nähden. Eli pomon palkka on 500 % Vernerin palkasta. Vernerin palkkaa pitäisi nostaa 400 %, jotta se olisi yhtä suuri kuin pomon palkka. Oikea vastaus on siis D.

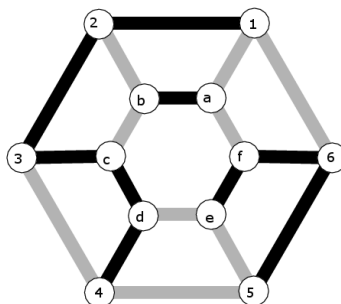
**11.** Miltä kuvan kappale näyttää ylhäältä päin katsottuna?



**Ratkaisu.** Käytetään verkkoteoriasta tuttuja käsitteitä kutsumalla kappaleen suoria osia kaariksi ja niiden yhtymäkohtia solmuiksi. Kutsutaan solmuilla toisiinsa kytkeytyvien mustien kaarien yhdistelmää poluksi. Nimitetään alhaalla olevat solmut numeroilla 1, 2, 3, 4, 5 ja 6 ja ylhäällä olevat solmut kirjaimilla a, b, c, d, e ja f:



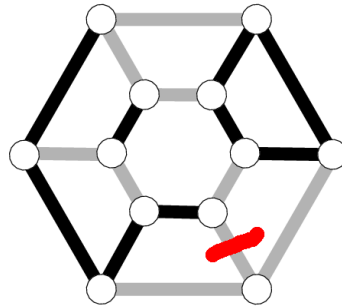
Tarkastelemalla mustia kaaria huomataan, että pisintä polkua 1-2-3-c-d-4 vastaava polku (eli ensin alhaalla kaksi sivulle, sitten yksi ylös, yksi sivulle samaan suuntaan kuin aiemmin ja sitten yksi alas) tulee löytyä myös ylhäältä katsottuna. Mistään muusta kuvasta kuin B tätä ei löydy. (Kuvasta B löytyvät myös muut polut eli a-b ja e-f-6-5).



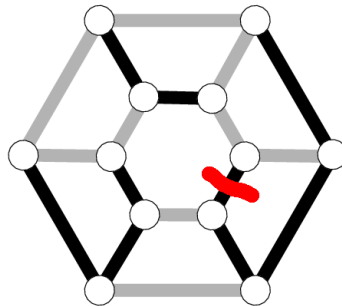
Näytetään vielä, miksi muut kuvat eivät voi olla kappaleestamme.



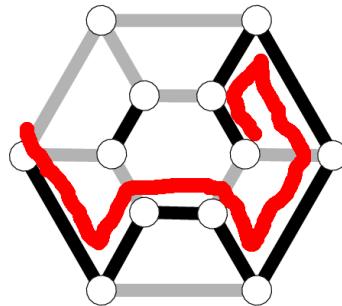
Kuvassa A polku jää kesken, sillä siinä vastaava polku jättää tulematta lopulta alas:



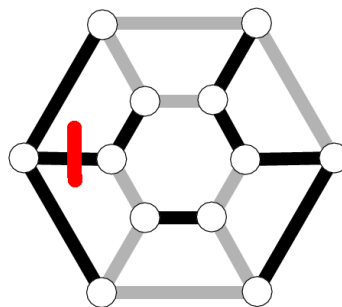
Kuvassa C alhaalta ylös nousun jälkeen käännytään väärään suuntaan:



Kuvasta D sen sijaan löytyy liian pitkä polku:



Lopulta kuvassa E kahden alhaalla sijaitsevan kaaren sisältämä polku nousee ylös näitä kaaria yhdistävästä solmusta, joten se ei sovi kappaleeseemme.



**12.** Kanga haluaa kertoa keskenään kolme eri lukua oheisesta listasta:  $-5, -3, -1, 2, 4$  ja  $6$ . Mikä on pienin mahdollinen tulos?

A)  $-200$

B)  $-120$

C)  $-90$

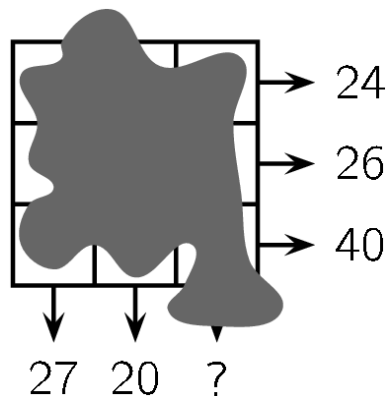
D)  $-48$

E)  $-15$



**Ratkaisu.** Pienin mahdollinen tulos on negatiivinen ja se saadaan, kun kertolaskuun valitaan pariton määrä negatiivisia lukuja (eli 1 tai 3 negatiivista lukua). Negatiivinen luku on mahdollisimman pieni, kun sen itseisarvo on mahdollisimman suuri, joten kertolaskuun pitää valita itseisarvoltaan mahdollisimman suuret luvut. Listan luvuista kolme itseisarvoltaan suurinta ovat 6,  $-5$  ja 4. Kun nämä kerrotaan keskenään, saadaan  $-120$  eli oikea vastaus on B.

**13.**  $3 \times 3$ -ruudukon jokaiseen neliöön on kirjoitettu luku. Ruudukon päälle on vahingossa kaatunut mustetta ja siksi luvut eivät ole näkyvissä. Kuvion nuolet kertovat kuitenkin jokaisen rivin ja kahden sarakkeen lukujen summan. Mikä on kolmannen sarakkeen lukujen summa?



- A) 41                      B) 43                      C) 44                      D) 45                      E) 47

**Ratkaisu.** Riveillä olevien lukujen summat ovat yhteensä  $24 + 26 + 40 = 90$ . Koska samat luvut ovat myös sarakkeissa, täytyy sarakkeiden summan olla myös 90. Puuttuvan sarakkeen summa saadaan laskulla  $90 - 27 - 20 = 43$ . Oikea vastaus on siis B.

**14.** 12 väritettyä kuutiota järjestetään riviin. Kuutioista 3 on sinisiä, 2 keltaisia, 3 punaisia ja 4 vihreitä. Kuutiot eivät ole kuitenkaan tässä järjestyksessä. Rivin yhdessä päässä on keltainen kuutio ja toisessa päässä on punainen kuutio. Kaikki punaiset kuutiot ovat vierekkäin. Samoin kaikki vihreät kuutiot ovat vierekkäin. Kymmenes kuutio vasemmalta on sininen. Minkä värinen on kuudes kuutio vasemmalta?

- A) vihreä                      B) keltainen                      C) sininen                      D) punainen                      E) punainen tai sininen

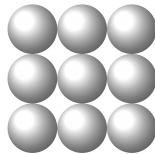
**Ratkaisu.** Rivin päissä on keltainen kuutio ja punainen kuutio. Tutkitaan ensin tilannetta, jossa vasemmalla on keltainen kuutio ja oikealla punainen kuutio ja merkitään vasemman reunan kuutiota numerolla 1 ja oikean reunan kuutiota numerolla 12. Koska kaikki kolme punaista kuutiota ovat vierekkäin, ovat kuutiot 12, 11 ja 10 punaisia. Tehtävässä sanottiin kuitenkin, että 10. kuutio vasemmalta on sininen, joten punaiset kuutiot eivät voi olla oikeassa reunassa. Nyt tiedetään siis, että kuutiot 1, 2 ja 3 ovat punaisia, kuutio 10 on sininen ja kuutio 12 on keltainen.

Vihreitä kuutioita on 4 ja ne ovat kaikki vierekkäin. Ne eivät mahdu kuutioiden 10 ja 12 väliin, joten vihreät kuutiot ovat paikoilla 4, 5, 6, 7, 8, ja 9. Jos ensimmäinen vihreä kuutio on paikalla 4, ovat muut vihreät kuutiot paikoilla 5, 6 ja 7, joten 6. kuutio vasemmalta on vihreä. Jos ensimmäinen vihreä kuutio on paikalla 5, ovat muut vihreät kuutiot paikoilla 6, 7 ja 8, joten 6. kuutio vasemmalta on vihreä. Jos ensimmäinen vihreä kuutio on paikalla 6, ovat muut vihreät kuutiot paikoilla 7, 8 ja 9, joten 6. kuutio vasemmalta on vihreä. Muita mahdollisia paikkoja vihreillä kuutioilla ei ole, joten vastaus on A vihreä.

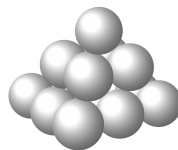




**15.** Oliver rakentaa pyramidin palloista. Pohjaneliössä on  $3 \times 3$  palloa.



Keskimmäisessä kerroksessa on  $2 \times 2$  palloa ja huipulla on yksi pallo.



Jokaisessa kohdassa, jossa kaksi palloa koskettaa toisiaan, on liimatippa. Kuinka monta liimatippaa pyramidissa on?

- A) 20                      B) 24                      C) 28                      D) 32                      E) 36

**Ratkaisu.** Pohjakerroksessa on 9 palloa kolmen pallon riveissä. Jokaisessa kolmessa rivissä on 2 liimatippaa pallojen välissä eli yhteensä  $3 \cdot 2 = 6$  liimatippaa. Jokainen rivi on kiinni toisessa rivissä kolmen pallon kohdalta eli tarvitaan  $2 \cdot 3 = 6$  liimatippaa. Pohjakerrokseen tarvitaan siis 12 liimatippaa. Keskimmäisessä kerroksessa on 4 palloa kiinni toisissaan eli tarvitaan 4 liimatippaa. Jokainen keskimmäisen kerroksen pallo koskettaa neljää pohjakerroksen palloa eli tarvitaan  $4 \cdot 4 = 16$  liimatippaa. Keskimmäiseen kerrokseen tarvitaan yhteensä 20 liimatippaa.

Huipulla on yksi pallo, joka koskee kaikkia keskimmäisen kerroksen neljää palloa. Tarvitaan siis vielä 4 liimatippaa.

Yhteensä liimatippoja tarvitaan  $12 + 20 + 4 = 36$ . Oikea vastaus on E.

**16.** Aishalla on paperilappu, jonka ruutuihin on kirjoitettu numerot 1, 2, 3, 4, ja 5.

1	2	3	4	5
---	---	---	---	---

Hän taittelee lapun viiteen kerrokseen niin, että ruudut ovat päällekkäin.

Mikä seuraavista järjestyksistä ei ole mahdollinen, kun päällimmäinen numero on listassa ensimmäisenä?

- A) 3, 5, 4, 2, 1            B) 3, 4, 5, 1, 2            C) 3, 2, 1, 4, 5            D) 3, 1, 2, 4, 5            E) 3, 4, 2, 1, 5

**Ratkaisu.** Kaikissa vastausvaihtoehdoissa on numero 3 ensimmäisenä, joten sen täytyy jäädä taittelussa pinon päällimmäiseksi. Käydään läpi vaihtoehdot A - E.

Vaihtoehto A: Taitetaan numero 5 numeron 4 alle ja sen jälkeen pino 4+5 numeron 3 alle. Näin numero 5 jää numeroiden 3 ja 4 väliin. Seuraavaksi taitetaan numero 1 numeron 2 päälle ja sen jälkeen pino 1+2 numeropinon 3+5+4 alle. Nyt on yhdistelmä 3, 5, 4, 2, 1 valmis.

Vaihtoehto B: Taitetaan numero 5 numeron 4 päälle ja sen jälkeen pino 5+4 numeron 3 alle. Näin numero 4 jää numeroiden 3 ja 5 väliin. Seuraavaksi taitetaan numero 1 numeron 2 alle ja sen jälkeen pino 2+1 numeropinon 3+4+5 alle. Nyt on yhdistelmä 3, 4, 5, 1, 2 valmis.

Vaihtoehto C: Taitetaan numero 1 numeron 2 päälle ja sen jälkeen pino 1+2 numeron 3 alle. Näin numero 2 jää numeroiden 3 ja 1 väliin. Seuraavaksi taitetaan numero 5 numeron 4 päälle ja sen jälkeen



pino 5+4 numeropinon 3+2+1 alle. Nyt on yhdistelmä 3, 2, 1, 4, 5 valmis.

Vaihtoehto D: Taitetaan numero 1 numeron 2 alle ja sen jälkeen pino 2+1 numeron 3 alle. Näin numero 1 jää numeroiden 3 ja 2 väliin. Seuraavaksi taitetaan numero 5 numeron 4 päälle ja sen jälkeen pino 5+4 numeropinon 3+2+1 alle. Nyt on yhdistelmä 3, 1, 2, 4, 5 valmis.

Vaihtoehto E: Taitetaan numero 4 numeron 3 alle, jolloin numero 5 jää numeron 2 alle. Nyt on mahdollonta taittaa numeroa 2 numeropinon 3+4 alle ilman, että numero 5 jäisi väliin. Siksi vaihtoehto E on mahdoton. Voi myös huomata, että koska ruudut 1 ja 2 ovat paperilapussa kiinni toisissaan ja ruudut 4 ja 5 ovat kiinni toisissaan, on niiden oltava taitellussa pinossa peräkkäin. Vaihtoehdossa E näin ei ole, joten se ei ole mahdollinen.

**17.** Tanssikilpailun finaalissa jokainen tuomariston jäsen jakaa viidelle kilpailijalle pisteet 0, 1, 2, 3 ja 4. Tuomari ei saa antaa samaa pistemäärää kahdelle eri kilpailijalle. Adam tietää kilpailijoiden pisteiden summat ja muutamia yksittäisiä pisteitä alla olevan taulukon mukaisesti. Kuinka monta pistettä Adam sai tuomarilta numero III?

	Adam	Berta	Clara	David	Emil
I	2	0			
II		2	0		
III					
Summa	7	5	3	4	11

A) 0

B) 1

C) 2

D) 3

E) 4

**Ratkaisu.** Taulukon mukaan Berta sai tuomarilta III  $5 - 2 - 0 = 3$  pistettä.

Clara sai yhteensä 3 pistettä ja koska hän sai tuomarilta II 0 pistettä, sai hän kahdelta muulta tuomarilta 1 ja 2 pistettä. Koska tuomari I oli jo antanut Adamille 2 pistettä, hän ei voinut antaa Claralle 2 pistettä vaan 1 pisteen. Siispä tuomari III antoi Claralle 2 pistettä.

Emil sai yhteensä 11 pistettä, jonka voi saada seuraavilla tavoilla:

$$4 + 4 + 3 = 4 + 3 + 4 = 3 + 4 + 4$$

Ensimmäinen vaihtoehto ei ole mahdollinen, koska tuomari III on jo antanut 3 pistettä Bertalle. Joten tuomari III antoi Emilille 4 pistettä.

David sai yhteensä 4 pistettä, jonka voi saada seuraavilla tavoilla:

$$3 + 1 + 0 = 3 + 0 + 1 = 1 + 3 + 0 = 1 + 0 + 3 = 0 + 1 + 3 = 0 + 3 + 1$$

Näistä vain

$$3 + 1 + 0 = 1 + 3 + 0$$

ovat mahdollisia, koska tuomari I on jo antanut 0 pistettä Bertalle, tuomari II on jo antanut 0 pistettä Claralle ja tuomari III on jo antanut 3 pistettä Bertalle. Tämän perusteella tuomari III antoi 0 pistettä Davidille.

Tuomari III on nyt antanut pisteitä seuraavasti: Berta 3, Clara 2, David 0 ja Emil 4. Enää on antamatta 1 piste, joka menee Adamille. Oikea vastaus on siis B.

**18.** Anton ostaa 27 samanlaista pientä kuutiota. Jokaisessa kuutiossa on 2 vierekkäistä tahkoa maalattu punaiseksi ja loput 4 tahkoa ovat toisen värisiä. Hän rakentaa näistä 27 kuutiosta yhden ison kuution. Kuinka monta kokonaan punaista tahkoa isoon kuutioon voi korkeintaan tehdä?



A) 2

B) 3

C) 4

D) 5

E) 6

**Ratkaisu.** Koska punaiseksi maalatut tahkot ovat pikkukuutioissa vierekkäin, täytyy isonkin kuution punaisten tahkojen olla vierekkäin, jotta saataisiin mahdollisimman monta punaista tahkoa. Kun ison kuution kulmaan laitetaan pikkukuutio, riittää pikkukuutiosta punaisia tahkoja vain kahdelle ison kuution tahkolle, kolmas tahko jää ilman punaista väriä.

Jos tehdään isoon kuutioon yksi kokonaan punainen tahko, vaikkapa kuution etutahko, on mahdollista saada punaista väriä tämän tahkon kahdelle vierekkäiselle tahkolle (esimerkiksi vasemmalle ja oikealle), mutta silloin pohjatahkon ja kansitahkon kulmat jäävät ilman punaista väriä. Sen sijaan etutahkoa vastapäätä oleva takatahko on mahdollista tehdä kokonaan punaiseksi. Näin kokonaan punaisia ison kuution tahkoja on korkeintaan neljä. Oikea vastaus on siis C.

**19.** Uima-altaan kulmissa on neljä lasta. Heidän valmentajansa seisoo jossakin uima-altaan reunalla. Kun valmentaja kutsuu lapset luokseen, 3 lapsista nousee altaasta ja kävelee lyhintä mahdollista reittiä valmentajan luo. He kävelevät yhteensä 50 m. Uima-altaan pituus on 25 m ja päädyn leveys on 10 m.

Mikä on lyhin matka, jonka valmentaja joutuu kävelemään neljännen lapsen luo?

A) 10 m

B) 12 m

C) 15 m

D) 20 m

E) 25 m

**Ratkaisu.** Ajatellaan uima-allas suorakulmiona ABCD, jossa sivut AB ja CD ovat 25 m ja BC ja AD ovat 10 m. Valmentaja voi seisoa joko lyhyellä sivulla (AD tai BC) tai pitkällä sivulla (AB tai CD). Lasketaan kävelymatkat molemmissa vaihtoehdoissa.

Jos valmentaja seisoo lyhyellä sivulla BC ja 2 oppilasta lähtee kahdesta kauimmaisesta kulmasta A ja D kävelemään valmentajan luo, tulee kävelymatkaa yli 50 m: A:sta koko 25 m sivu + osa sivusta BC ja D:stä koko 25 m sivu + osa sivusta BC, joten tämä on mahdoton vaihtoehto.

Jos valmentaja seisoo lyhyellä sivulla BC ja yksi oppilas lähtee toisesta kauimmaisesta kulmasta A (tai D) ja 2 oppilasta lähtee lähimmistä kulmista B ja C kävelemään valmentajan luo, tulee kävelymatkaa seuraavasti: A:sta koko 25 m sivu + x:n verran sivusta BC ja lisäksi B:stä ja C:stä yhteensä 10 m. Jotta nämä kävelymatkat olisivat yhteensä 50 m, pitäisi x:n olla  $50 \text{ m} - 25 \text{ m} - 10 \text{ m} = 15 \text{ m}$ , mikä on mahdotonta, koska sivu BC oli vain 10 m. Siispä tämäkin on mahdoton vaihtoehto.

Koska lyhyet sivut BC ja AD ovat samanpituiset, käy samalla tavalla, jos valmentaja seisoo lyhyellä sivulla AD. Valmentaja ei siis seiso uima-altaan lyhyellä sivulla.

Jos valmentaja seisoo pitkällä sivulla AB ja 2 oppilasta lähtee kulmista C ja D kävelemään valmentajan luo, tulee kävelymatkaa seuraavasti: D:sta koko 10 m sivu + osa sivusta AB ja C:stä koko 10 m sivu + toinen osa sivusta AB, mikä on yhteensä  $10 \text{ m} + 10 \text{ m} + 25 \text{ m} = 45 \text{ m}$ . Kolmannelle oppilaalle jää siis kävelymatkaa 5 m, koska kolmen oppilaan matkat piti olla yhteensä 50 m. Joten kolmas oppilas lähtee kulmasta B (tai kulmasta A) ja valmentaja seisoo 5 m päässä kulmasta B (tai kulmasta A). Tällöin neljäs oppilas seisoo kulmassa A (kulmassa B) ja valmentaja joutuu kävelemään hänen luokseen  $25 \text{ m} - 5 \text{ m} = 20 \text{ m}$ .

Jos valmentaja seisoo pitkällä sivulla AB ja yksi oppilas lähtee toisesta kauimmaisesta kulmasta C (tai D) ja 2 oppilasta lähtee lähimmistä kulmista A ja B kävelemään valmentajan luo, tulee kävelymatkaa seuraavasti: C:stä koko 10 m sivu + x:n verran sivusta AB ja lisäksi A:stä ja B:stä yhteensä 25 m. Jotta nämä kävelymatkat olisivat yhteensä 50 m, pitäisi x:n olla  $50 \text{ m} - 25 \text{ m} - 10 \text{ m} = 15 \text{ m}$  eli valmentaja seisoo tässä tapauksessa 15 m päässä B:stä ja 10 m päässä A:sta. Tällöin valmentaja joutuu kävelemään nel-



jännän oppilaan luo kulmaan D ensin 10 m A:han ja sitten koko sivun AD eli 10 m, yhteensä siis 20 m.

Koska pitkät sivut AB ja CD ovat samanpituiset, käy samalla tavalla, jos valmentaja seisoo pitkällä sivulla CD. Eli lyhin matka, jonka valmentaja joutuu kävelemään neljännen oppilaan luo, on 20 m, siksi vaihtoehto D on oikein.

**20.** Kuinka monta sellaista positiivista nelinnumeroista lukua A on olemassa, jotka toteuttavat seuraavat kolme ehtoa:

- luvun A puolikas on jaollinen luvulla 2,
- luvun A kolmasosa on jaollinen luvulla 3 ja
- luvun A viidesosa on jaollinen luvulla 5?

A) 1                      B) 7                      C) 9                      D) 10                      E) 11

**Ratkaisu.** Jos luvun A puolikas on jaollinen luvulla 2, täytyy luvun A olla jaollinen luvulla 4.

Jos luvun A kolmasosa on jaollinen luvulla 3, täytyy luvun A olla jaollinen luvulla 9.

Jos luvun A viidesosa on jaollinen luvulla 5, täytyy luvun A olla jaollinen luvulla 25.

Koska luvuilla 4, 9 ja 25 ei ole yhteisiä tekijöitä, saadaan pienin luvuilla 4, 9 ja 25 jaollinen luku kertomalla luvut 4, 9 ja 25 keskenään:  $4 \cdot 9 \cdot 25 = 900$ . Kun luku 900 kerrotaan jollakin kokonaisluvulla, saadaan uusia lukuja, jotka ovat jaollisia luvuilla 4, 9 ja 25. Kerrotaan lukua 900 kokonaisluvuilla 2, 3, 4... niin kauan, kuin tuloksena oleva luku on 4-numeroinen:

$2 \cdot 900 = 1800$ ,  $3 \cdot 900 = 2700$ ,  $4 \cdot 900 = 3600$ ,  $5 \cdot 900 = 4500$ ,  $6 \cdot 900 = 5400$ ,  $7 \cdot 900 = 6300$ ,  $8 \cdot 900 = 7200$ ,  $9 \cdot 900 = 8100$ ,  $10 \cdot 900 = 9000$ ,  $11 \cdot 900 = 9900$ ,  $12 \cdot 900 = 10800$

Listassa on 10 kappaletta nelinnumeroista lukua, jotka ovat jaollisia luvuilla 4, 9 ja 25, joten oikea vastaus on D.

**21.** Alla on annettu vihjeitä nelinnumeroisesta mysteeriluvusta.

4	1	3	2
---	---	---	---

Kaksi numeroa on oikein, mutta ne ovat väärillä paikoilla.

9	8	2	6
---	---	---	---

Yksi numero on oikein ja se on oikealla paikalla.

5	0	7	9
---	---	---	---

Kaksi numeroa on oikein, toinen on oikealla paikalla ja toinen on väärällä paikalla.

2	7	4	1
---	---	---	---

Yksi numero on oikein, mutta se on väärällä paikalla.

7	6	4	2
---	---	---	---

Yksikään numero ei ole oikein.

Mikä on mysteeriluvun viimeinen numero?

A) 0                      B) 1                      C) 3                      D) 5                      E) 9

**Ratkaisu.** Alimman vihjeen mukaan voidaan hylätä mysteeriluvusta ja muista vihjeistä numerot 7, 6, 4 ja 2.



<del>4</del>	1	3	<del>2</del>
9	8	<del>2</del>	<del>6</del>
5	0	<del>7</del>	9
<del>2</del>	<del>7</del>	<del>4</del>	1
<del>7</del>	<del>6</del>	<del>4</del>	<del>2</del>

Tämän jälkeen neljännen vihjeen numeroista (2, 7, 4, 1) jäljelle jää vain yksi numero eli 1, joka on oikea numero, mutta väärällä paikalla. Mysteeriluvun viimeinen numero ei siis ole 1.

Toisesta vihjeestä (9, 8, 2, 6) jää jäljelle numerot 9 ja 8, joista toinen on oikein ja se on oikealla paikalla.

Jos oletetaan, että numero 8 on oikea, se olisi toisen vihjeen mukaan luvussa toisena. Ensimmäisen vihjeen (4, 1, 3, 2) mukaan mysteeriluvussa täytyy esiintyä myös numerot 1 ja 3. Vastaavasti kolmannen vihjeen (5, 0, 7, 9) mukaan mysteeriluvussa täytyy esiintyä numerot 5 ja 0. Tämän perusteella mysteeriluvussa olisi jo viisi numeroa: 8, 1, 3, 5 ja 0, joten oletus, että numero 8 olisi oikea, on hylättävä.

Edellisten perusteella päädyttiin siihen, että toisessa vihjeessä numero 9 on oikea, joten se on paikalla 1 eli mysteeriluvun viimeinen numero ei ole 9.

Kolmannen vihjeen (5, 0, 7, 9) mukaan oikeita numeroita on joko 5 ja 9 tai 0 ja 9. Näistä toinen on oikealla paikalla ja toinen on väärällä paikalla.

Numero 9 on väärällä paikalla (koska toisen vihjeen perusteella numero 9 on paikalla 1), joten joko 0 tai 5 on oikealla paikalla. Koska oletimme aikaisemmin, että 9 on mysteeriluvussa ensimmäisenä, ei oikea numero voi olla 5. Joten 0 on mysteeriluvussa toisena, eikä silloin kumpikaan numeroista 5 ja 0 ole mysteeriluvun viimeinen numero.

Mysteeriluku näyttäisi olevan luku (9, 0, x, y).

Ensimmäisen vihjeen (4, 1, 3, 2) mukaan mysteeriluvussa on numerot 1 ja 3, mutta ne ovat väärillä paikoilla.

Koska mysteeriluvussa on vain 2 viimeistä paikkaa vapaana eikä numero 3 voi olla toiseksi viimeinen, on sen pakko olla mysteeriluvun viimeinen numero. Vastaus on siis C.