



**3 pistettä**

**1.**

Kenguru-kilpailu on joka vuosi maaliskuun kolmantena torstaina. Mikä on ensimmäinen mahdollinen päivä kilpailulle?

- (A) 14.3.      **(B) 15.3.**      (C) 20.3.      (D) 21.3.      (E) 22.3.

**Ratkaisu:** Jos maaliskuun ensimmäinen päivä on torstai, on kolmas torstai siitä kahden viikon eli 14 päivän päästä, 15. päivä. Siis ainakin 15. päivä on mahdollinen kilpailupäivä. Tätä aikaisemmat päivät eivät voi olla kilpailupäiviä, sillä jos 14. päivä on torstai, sitä edelliset kaksi torstaita ovat maaliskuun 7. päivä ja helmikuun viimeinen päivä, joten 14. päivä olisi helmikuun toinen torstai.

**2.**

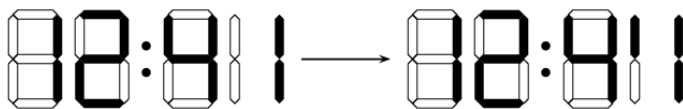
MSC Fabiola on suurin rahtialus, joka on koskaan seilannut San Franciscon lahdella. Jos aluksen rahtina olevat 12 500 konttia laitettaisiin peräkkäin, konttijono olisi noin 75 km pitkä. Kuinka pitkä yksi kontti suunnilleen on?

- (A) 6 m**      (B) 16 m      (C) 60 m      (D) 160 m      (E) 600 km

**Ratkaisu:**  $75\,000\text{ m} : 12\,500 = 6\text{ m}$

**3.**

Paulan digitaalisen kellon näyttö on rikki. Kellon oikeanpuoleisimman numeron kolmesta vaakasuorasta valoviivasta yksikään ei toimi. Paula katsoo kelloaan, ja aika on juuri vaihtunut vasemmalla puolella näkyvästä oikealla puolella näkyvään (katso kuva). Paljonko kello on nyt?



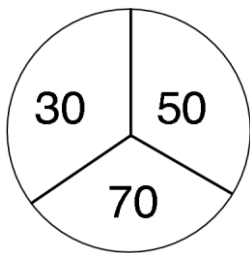
- (A) 12:40      (B) 12:42      **(C) 12:44**      (D) 12:47      (E) 12:49

**Ratkaisu:**

Vasemmanpuoleisessa kuvassa voisi olla viimeisenä numerona 1, 3 tai 7. Oikeanpuoleisessa puolestaan 4 tai 9. Näistä peräkkäiset ovat 3 ja 4, joten kello on 12:44.



4. Pauliina ampuu nuolia kuvassa olevaan maalitauluun.



Taulun ohi menevistä nuolista saa 0 pistettä. Pauliina ampuu kaksi nuolta ja laskee pisteet yhteen. Mikä yhteistuloksista ei ole mahdollinen?

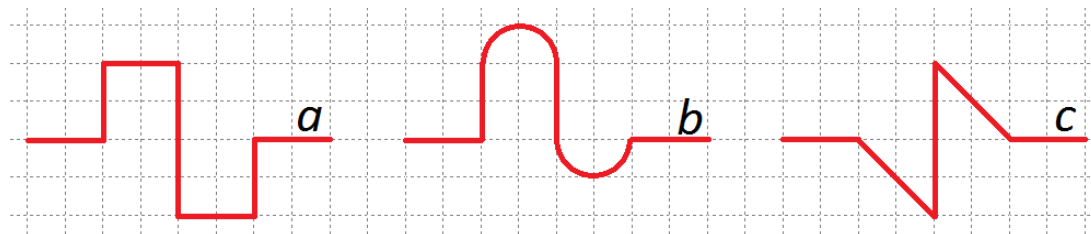
- (A) 60                      (B) 70                      (C) 80                      (D) 90                      (E) 100

**Ratkaisu:**

$60 = 30 + 30$ ,  $70 = 70 + 0$ ,  $80 = 30 + 50$ ,  $100 = 50 + 50$ , mutta 90 pistettä ei voi saada kahdella nuolella.

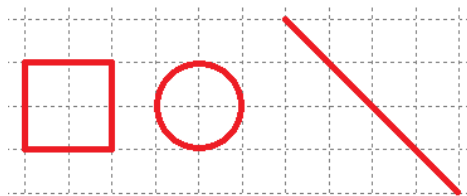
5.

Jos  $a$ ,  $b$  ja  $c$  ovat kuvassa olevien käyrien pituudet, niin mikä seuraavista on oikein?



- (A)  $a < b < c$                       (B)  $a < c < b$                       (C)  $b < a < c$                       (D)  $b < c < a$                       (E)  $c < b < a$

**Ratkaisu:** Käyrissä on paljon samaa. Jos poimitaan kustakin ne osat, jotka poikkeavat muista, saadaan



Kun näistä kustakin otetaan neljännes, saadaan



Tästä nähdään, että kuviot ovat pituusjärjestyksessä suurimmasta pienimpään.

Pelkällä laskemisellakin toki pärjää:



Käyrän  $a$  pituus on 16 ruudun sivua. Käyrän  $b$  pituus on  $8 + 2\pi$  (kaareva osuus on sellaisen ympyrän kehän pituus, jonka halkaisija on kaksi ruudun sivua). Käyrän  $c$  pituus on  $8 + 2 \cdot 2\sqrt{2} = 8 + 4\sqrt{2}$  (yhden vinottain kulkevan osan pituus saadaan Pythagoraan lauseella:  $\sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{2 \cdot 4} = 2\sqrt{2}$ ). Koska  $\pi \approx 3,1$  ja  $2\sqrt{2} \approx 2,8$ , on  $c < b < a$ .

6.

Mikä luku on lukujen  $\frac{2}{3}$  ja  $\frac{4}{5}$  puolivälissä?

(A)  $\frac{11}{15}$

(B)  $\frac{7}{8}$

(C)  $\frac{3}{4}$

(D)  $\frac{6}{15}$

(E)  $\frac{5}{8}$

**Ratkaisu:**  $\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$  ja  $\frac{4}{5} = \frac{12}{15}$ . Näiden puolivälissä on luku  $\frac{11}{15}$ .

7.

Luvussa 2014 viimeinen numero on suurempi kuin muiden kolmen numeron summa. Kuinka monta vuotta sitten tällainen vuosi oli viimeksi?

(A) 1

(B) 3

(C) 5

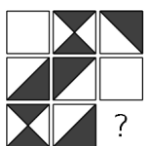
(D) 7


(E) 11


**Ratkaisu:** 2010-luvulla tämä tapahtui ensimmäisen kerran 2014, koska ensimmäinen luku, joka on suurempi kuin  $2+0+1 = 3$ , on luku 4. 00-luvun viimeisenä vuonna, vuonna 2009, näin oli:  $2+0+0 = 2$  ja luku 9 on suurempi kuin luku 2. Siis edellinen tällainen vuosi oli  $2014 - 2009 = 5$  vuotta sitten.

8.

Mikä laatta pitää lisätä kuvaan, jotta valkoinen alue on yhtä suuri kuin musta alue?



(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

(E) Se on mahdotonta

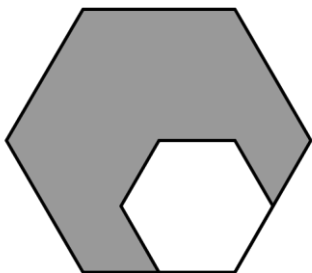
**Ratkaisu:**

Kaksivärisissä laatoissa on yhtä paljon mustaa ja valkoista. Lisäksi kuvassa on kaksi kokonaan valkoista laattaa. Mustaa on siis vähemmän, oli lisättävä laatta millainen tahansa.



9.

Kuvassa olevan suuremman säännöllisen kuusikulmion sivun pituus on kaksi kertaa niin suuri kuin pienemmän säännöllisen kuusikulmion sivun pituus. Pienemmän kuusikulmion pinta-ala on  $4 \text{ cm}^2$ . Mikä on suuremman kuusikulmion pinta-ala?



- (A)  $16 \text{ cm}^2$       (B)  $14 \text{ cm}^2$       (C)  $12 \text{ cm}^2$       (D)  $10 \text{ cm}^2$       (E)  $8 \text{ cm}^2$

**Ratkaisu:** Pinta-alojen suhde on pituuksien suhteen neliö. Kun kuvion sivun pituus kaksinkertaistuu, pinta-ala nelinkertaistuu. Siis suuremman kuvion pinta-ala on  $4 \cdot 4 \text{ cm}^2$ .

10.

Tiedetään, että väite ”Jokainen ratkaisi enemmän kuin 20 tehtävää” ei ole totta. Mikä seuraavista on varmasti totta?

- (A) Kukaan ei ratkaissut enempää kuin 20 tehtävää  
(B) Joku ratkaisi vähemmän kuin 21 tehtävää  
(C) Kaikki ratkaisivat vähemmän kuin 21 tehtävää.  
(D) Joku ratkaisi täsmälleen 20 tehtävää.  
(E) Joku ratkaisi enemmän kuin 20 tehtävää.

**Ratkaisu:** Jos ei ole totta, että jokainen ratkaisi enemmän kuin 20 tehtävää, niin ratkaisijoiden joukossa on joku, johon ei päde väite, että tämä ratkaisi enemmän kuin 20 tehtävää. Joku on siis ratkaissut korkeintaan 20 tehtävää eli vähemmän kuin 21 tehtävää. Tämä on vaihtoehto B.

4 pistettä

11.

Jesse piirsi koordinaatistoon neliön. Yksi sen lävistäjistä on  $x$ -akselilla.  $x$ -akselilla sijaitsevien kärkipisteiden koordinaatit ovat  $(-1,0)$  ja  $(5,0)$ . Mikä seuraavista pisteistä on tämän neliön kärkipiste?

- (A)  $(2, 0)$       (B)  $(2, 3)$       (C)  $(2, -6)$       (D)  $(3, 5)$       (E)  $(3, -1)$

**Ratkaisu:** Lävistäjät puolittavat toisensa, joten toisten kärkipisteiden  $x$ -koordinaatti on kohtien  $x = -1$  ja  $x = 5$  puolivälissä eli kohdassa  $x = 2$ . Neliön lävistäjän pituus on  $1 + 5 = 6$ , ja lävistäjästä puolet on  $x$ -akselin ylä- ja puolet alapuolella. Siis toisten kärkipisteiden  $y$ -koordinaatit ovat  $y = -3$  ja  $y = 3$ .



12.

Eräässä kylässä aikuisten miesten ja aikuisten naisten määrän suhde on  $2 : 3$  ja aikuisten naisten ja lasten määrän suhde on  $8 : 1$ . Mikä on aikuisten (miesten ja naisten) ja lasten määrän suhde?

- (A)  $5 : 1$                       (B)  $10 : 3$                       (C)  $13 : 1$                       (D)  $12 : 1$                       **(E)  $40 : 3$**

**Ratkaisu:** Merkitään, että aikuisia naisia on  $24a$ . Tällöin lapsia on  $24a : 8 = 3a$  ja aikuisia miehiä on  $\frac{2}{3} \cdot 24a = 16a$ . Aikuisia on yhteensä  $16a + 24a = 40a$ . Aikuisten ja lasten määrän suhde on  $40a : 3a = 40 : 3$ .

13.

Kuvassa olevan polkupyörän isomman pyörän kehä on 4,2 metriä. Pienemmän pyörän kehä on 0,9 metriä. Tietyllä hetkellä kummankin pyörän venttiili on alimmassa mahdollisessa kohdassa. Polkupyörä ajaa vasemmalle. Kuinka monen metrin kuluttua molemmat venttiilit ovat ensimmäisen kerran uudestaan yhtä aikaa alimmassa kohdassa?



- (A) 4,2 m                      (B) 6,3 m                      **(C) 12,6 m**                      (D) 25,2 m                      (E) 37,8 m

**Ratkaisu:** Ison pyörän yksi kierros on  $\frac{4,2 \text{ m}}{0,9 \text{ m}} = \frac{14}{3}$  pienen pyörän kierrosta. Kun venttiilit ovat molemmat jälleen alimmassa kohdassa, täytyy molempien pyörien olla pyörähtänyt kokonainen määrä kierroksia. Pienimmät mahdolliset tällaiset kokonaisluvut ovat isolle pyörälle 3 kierrosta ja pienelle pyörälle 14. Metreissä tämä on  $3 \cdot 4,2 \text{ m} = 12,6 \text{ m}$ .

14.

Isoäiti, hänen tyttärensä ja tyttären tyttärensä voivat tänä vuonna sanoa, että heidän ikinsä summa on 100. Minä vuonna tyttären tytär on syntynyt, jos jokainen ikä on luvun 2 potenssi?

- (A) 1998                      (B) 2006                      **(C) 2010**                      (D) 2012                      (E) 2013

**Ratkaisu:** Lukua 100 pienempiä 2:n potensseja on 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64. Isoäidin iän on oltava 64, sillä seuraavaksi suurimmat luvut 32, 16 ja 8 eivät riitä:  $32 + 16 + 8 = 56$ . Samoin tyttären iän on oltava 32, muuten  $64 + 16 + 8 = 88$  eli liian pieni summa.

Ehdon toteuttaa  $100 = 64 + 32 + 4$ , eli tyttären tytär on 4 vuotta vuonna 2014. Hän on siis syntynyt vuonna 2010.



**15.**

Kuusi tyttöä jakaa asunnon, jossa on kaksi kylpyhuonetta. Tytöt käyttävät kylpyhuoneita joka aamu alkaen kello 7.00. He käyttävät kylpyhuoneita yksi kerrallaan ja syövät aamiaista heti kun viimeinen tyttö on valmis. He käyttävät kylpyhuoneessa aikaa 9, 11, 13, 18, 22 ja 23 minuuttia. Milloin he aikaisintaan voivat syödä aamiaista yhdessä?

- (A) 7:48                      **(B) 7:49**                      (C) 7:50                      (D) 7:51                      (E) 8:03

**Ratkaisu:**

Ratkaisu 7:49 on mahdollinen seuraavasti:

Kylpyhuone 1: 11, 13 ja 23 eli yhteensä 47 minuuttia

Kylpyhuone 2: 9, 18 ja 22 eli yhteensä 49 minuuttia

Ratkaisuun 7:48 pitäisi molempien kylpyhuoneiden olla varattuna 48 minuuttia, koska ajat ovat yhteensä 96 minuuttia. Tämä ei ole mahdollista millään jaolla:

Ei ole järkevää, että 22 ja 23 minuuttia käytetään samassa kylpyhuoneessa, koska se vie jo 45 minuuttia. Tarkastellaan siis, mitä muita pareja ajalla 22 minuuttia voi olla. Mikään näistä ei ole 48 minuuttia:

- $22 + 9 + 11 = 42$
- $22 + 9 + 13 = 44$
- $22 + 11 + 13 = 46$
- $22 + 11 + 18 = 51$
- $22 + 13 + 18 = 53$ .

**16.**

Afrikasta on löydetty uusi krokotiililaji. Sen hännän pituus on kolmannes sen koko pituudesta. Sen pää on 93 cm pitkä ja pään pituus on neljännes krokotiilin pituudesta ilman häntää. Kuinka monta senttimetriä krokotiilin pituus on?

- (A) 558 cm**                      (B) 496 cm                      (C) 490 cm                      (D) 372 cm                      (E) 186 cm

**Ratkaisu:** Krokotiilin pituus ilman häntää on  $\frac{2}{3}$  sen koko pituudesta. Pään pituus on neljännes tästä pituudesta, eli pään pituus on  $\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$  krokotiilin koko pituudesta. Pään pituus on 93 cm, joten krokotiilin koko pituus on  $6 \cdot 93 \text{ cm} = 558 \text{ cm}$ .



17.

Kuvassa on erityinen noppa. Sen vastakkaisilla tahkoilla olevien lukujen summa on aina sama. Luvut, joita kuvasta ei voi nähdä, ovat kaikki alkulukuja. Mikä luku on luvun 14 vastakkaisella tahkolla? Alkuluku on lukua 1 suurempi kokonaisluku, joka on jaollinen vain itsellään ja luvulla 1.



- (A) 11                      (B) 13                      (C) 17                      (D) 19                      (E) 23

**Ratkaisu:**

Tapa 1

Koska näkyvillä on luku 35, täytyy vastakkaisten tahkojen summan olla vähintään 37, sillä 2 on pienin alkuluku. Luvun 14 vastakkaisen luvun täytyy olla vähintään 23. Annetuista vaihtoehdoista vain 23 toteuttaa tämän ehdon.

Tapa 2

Näkyvissä on kaksi parillista ja yksi pariton luku. Jotta vastakkaisten lukujen summa olisi sama, myös piilossa olevissa alkuluvuissa pitää olla sekä parillisia että parittomia. Luku 2 on ainoa parillinen alkuluku, joten sen täytyy olla luvun 35 pari. Summa on siis  $35 + 2 = 37$ , joten kysytty luku on  $37 - 14 = 23$ .

18.

Ahmed on kävellyt 8 km nopeudella 4 km/h. Nyt hän hölkkää jonkin aikaa nopeudella 8 km/h. Kuinka pitkään hänen täytyy hölkkätä, jotta hänen keskimääräinen nopeutensa olisi 5 km/h?

- (A) 15 min                      (B) 20 min                      (C) 30 min                      (D) 35 min                      (E) 40 min

**Ratkaisu:** Ahmed käveli kaksi tuntia. Merkitään Ahmedin juoksemaa aikaa muuttujalla  $x$ . Tällöin Ahmedin juoksema matka on  $x \cdot 8$  km eli  $8x$ .

Ahmedin keskimääräinen nopeus saadaan yhtälöllä  $\frac{s}{t} = v$  eli

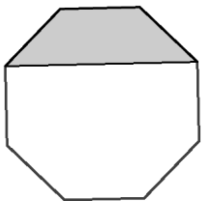
$$\frac{8 + 8x}{2 + x} = 5$$

$$x = \frac{2}{3}(\text{h}) = 40 \text{ min.}$$



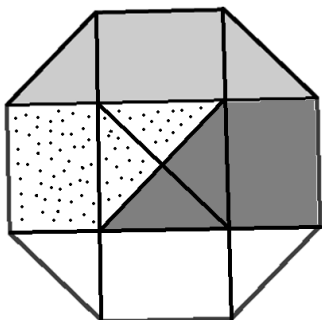
19.

Kuvassa on säännöllinen kahdeksankulmio. Varjostetun alueen pinta-ala on  $3 \text{ cm}^2$ . Laske kahdeksankulmion pinta-ala.



- (A)  $8 \text{ cm}^2$       (B)  $10 \text{ cm}^2$       (C)  $11 \text{ cm}^2$       **(D)  $12 \text{ cm}^2$**       (E)  $14 \text{ cm}^2$

**Ratkaisu:** Säännöllisen kahdeksankulmion voi jakaa osiin seuraavasti:



Alkuperäinen tummennettu ala on siis neljäsosa koko kuviosta. Pinta-ala on  $4 \cdot 3 \text{ cm}^2 = 12 \text{ cm}^2$ . Saman voi laskea myös pitkällisesti Pythagoraan lauseella.

20.

Shakinpelaaja pelasi 40 ottelua ja sai 25 pistettä. Voitosta saa yhden pisteen, tasapelistä puoli pistettä ja häviöstä nolla pistettä. Kuinka monta peliä enemmän pelaaja voitti kuin hävisi?

- (A) 5      (B) 7      **(C) 10**      (D) 12      (E) 15

**Ratkaisu:** Merkitään voittojen määrää kirjaimella  $v$ , tasapelejä  $t$  ja häviöitä  $h$ . Saadaan yhtälöt  $v + t + h = 40$  ja

$$v + \frac{1}{2}t = 25, \text{ mistä ratkaisemalla } t \text{ saadaan } t = 50 - 2v.$$

Siis  $v + 50 - 2v + h = 40$  eli  $v - h = 10$ . Voittoa oli 10 enemmän kuin häviöitä. Esimerkiksi 25 voittoa ja 15 häviötä sopii.





5 pistettä

21.

Olkoot  $p$ ,  $q$  ja  $r$  positiivisia kokonaislukuja ja olkoon  $p + \frac{1}{q+\frac{1}{r}} = \frac{25}{19}$ . Kuinka suuri on  $q$ ?

- (A) 1                      (B) 2                      **(C) 3**                      (D) 4                      (E) 5

**Ratkaisu:** Koska  $q$  ja  $r$  ovat positiivisia kokonaislukuja, niin  $0 < \frac{1}{q+\frac{1}{r}} < 1$ . Siis  $p$  on luvun  $\frac{25}{19} = 1\frac{6}{19}$  kokonaisosa 1 ja  $\frac{1}{q+\frac{1}{r}}$  sen murto-osa  $\frac{6}{19}$ . Siis  $q + \frac{1}{r} = \frac{19}{6}$ .

Vastaavasti koska  $r$  on positiivinen kokonaisluku, on  $q$  luvun  $\frac{19}{6} = 3\frac{1}{6}$  kokonaisosa ja  $\frac{1}{r}$  sen murto-osa. Näin ollen  $q = 3$ . ( Ja  $\frac{1}{r} = \frac{1}{6}$  eli  $r = 6$ . )

22.

Yhtälössä  $N \cdot U \cdot (M + E + R + O) = 33$  jokainen kirjain vastaa eri numeroa (0, 1, 2, ..., 9). Kuinka monta eri tapaa on valita kirjaimia vastaavat numerot?

- (A) 12                      (B) 24                      (C) 30                      **(D) 48**                      (E) 60

**Ratkaisu:** Luvun 33 tekijöitä ovat luvut 1, 3, 11 ja 33. Koska  $N$  ja  $U$  ovat lukuja väliltä 0, ..., 9, niiden täytyy olla 1 ja 3 (tai 3 ja 1). Siis yhtälö on muotoa  $1 \cdot 3 \cdot (M + E + R + O)$ , eli summan  $M + E + R + O$  täytyy olla 11.

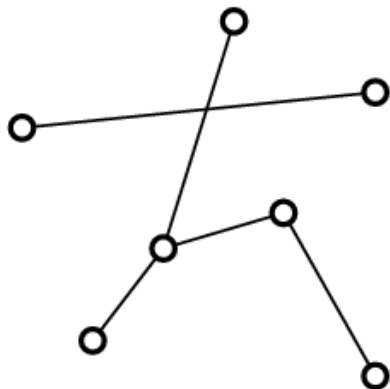
Kirjaimille  $M$ ,  $E$ ,  $R$ ,  $O$  jäi jäljelle vaihtoehtoiksi luvut 0, 2, 4, 5, ..., 9. Näistä neljän pienimmän summa on jo 11 ( $0 + 2 + 4 + 5 = 11$ ), joten kirjaimille ei ole muita vaihtoehtoja kuin luvut 0, 2, 4 ja 5.

Lukujen mahdollisia järjestyksiä on yhteensä  $2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 48$ .



23.

Kari haluaa lisätä alla olevaan kuvaan joitakin janoja niin, että jokaisesta seitsemästä pisteestä lähtee yhtä monta janaa toisiin pisteisiin. Mikä on pienin mahdollinen määrä janoja, joka Karin täytyy piirtää?



(A) 4

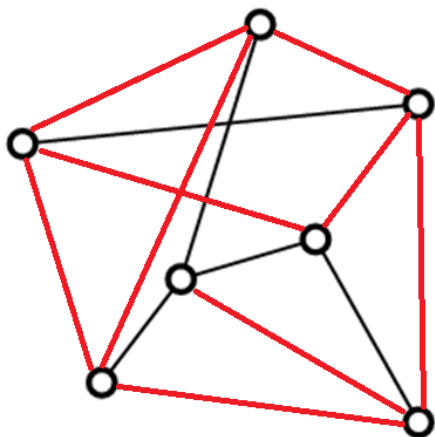
(B) 5

(C) 6

(D) 9

(E) 10

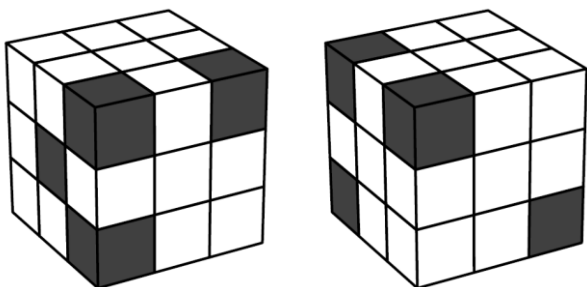
**Ratkaisu:** Joistakin pisteistä on jo kolme janaa muihin pisteisiin, joten kaikista pisteistä täytyy lähteä vähintään kolme janaa. Viiteen pisteeseen on piirrettävä kaksi yhteyttä lisää ja yhteen pisteeseen täytyy piirtää yksi yhteys lisää, eli täytyy piirtää janat, joilla on  $2 \cdot 5 + 1 = 11$  päätepistettä. Koska janalla on aina kaksi päätepistettä, tämä ei ole mahdollista. Siis jokaiselle pisteelle on piirrettävä vähintään neljä janaa. Halutaan lisätä  $11 + 7 = 18$  janan päätepistettä, mikä voidaan tehdä yhdeksällä janalla. Alla esimerkki, jossa jokaisesta pisteestä lähtee 4 janaa.





24.

Kuvassa näkyy sama kuutio kahdesta eri kulmasta. Kuutio on rakennettu 27 pienemmästä kuutiosta, joista osa on mustia ja osa valkoisia. Mikä on suurin määrä mustia kuutioita, mitä rakennelmassa voi olla?



(A) 5

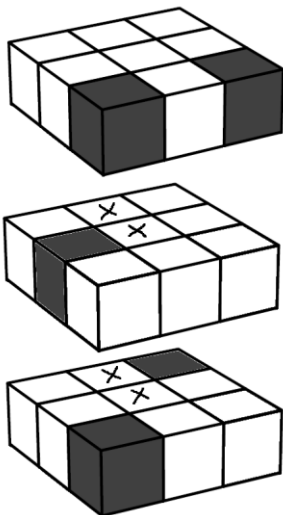
(B) 7

(C) 8

(D) 9

(E) 10

**Ratkaisu:** Oikeanpuoleinen kuva on saatu vasemmanpuoleisesta kääntämällä kuutiota  $90^\circ$  vasemmalle. Kuutiosta on siis nähty neljä tahkoa. Pilkotaan vasemmanpuoleinen kuva osiin:



Näkemättä ovat enää rastilla merkityt kuutiot, joten mustia on korkeintaan  $4 + 5 = 9$ .

25.

Eräällä saarella sammakot ovat aina joko vihreitä tai sinisiä. Sinisten sammakoiden lukumäärä nousi 60 %, kun taas vihreiden sammakoiden määrä laski 60 %. Huomattiin, että sinisten ja vihreiden sammakoiden uusien lukumäärien suhde oli sama kuin toisin päin laskettu (vihreiden ja sinisten sammakoiden) lukumäärien suhde ennen muutosta. Kuinka monta prosenttia sammakoiden kokonaismäärä muuttui muutoksessa?

(A) 0 %

(B) 20 %

(C) 30 %

(D) 40 %

(E) 50 %



**Ratkaisu:** Merkitään vihreiden sammakoiden alkuperäistä lukumäärää kirjaimella  $v$  ja sinisten sammakoiden vastaavasti kirjaimella  $s$ . Näiden suhde on  $v : s$ . Muutosten jälkeen vihreitä sammakoita oli  $0,4v$  ja sinisiä sammakoita  $1,6s$ . Näiden suhde on  $1,6s : 0,4v = 4s : v$ . Näiden suhteiden tulee olla samat, eli  $\frac{v}{s} = \frac{4s}{v}$ , joten

$$v^2 = 4s^2, \text{ joten}$$

$$v = 2s.$$

Aluksi sammakoita oli siis  $v + s = 2s + s = 3s$  ja lopuksi  $0,4v + 1,6s = 2 \times 0,4s + 1,6s = 2,4s$ .

Sammakoiden määrä muuttui  $\frac{3s-2,4s}{3s} = \frac{0,6s}{3s} = 0,2 = 20 \%$ .

**26.**

Taika kirjoitti ylös joitakin erisuuria positiivisia kokonaislukuja, joista kukin oli pienempi kuin 101. Niiden tulo ei ollut jaollinen luvulla 18. Kuinka monta lukua hän korkeintaan saattoi kirjoittaa?

- (A) 5                      (B) 17                      **(C) 68**                      (D) 69                      (E) 90

**Ratkaisu:**  $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$ . Taikan kirjoittamissa luvuissa ei saa esiintyä (alku)tekijöinä näistä luvuista kuin korkeintaan kaksi.

Jos lukujen tekijöissä saa esiintyä luku 3 vain kerran, se tarkoittaa, että mukana saa olla vain yksi luvulla 3 jaollinen luku. (Joka voi olla esimerkiksi luku 3, jolloin sen tekijöissä ei ole toista kertaa lukua 3.) Koska  $99 = 33 \cdot 3$ , on luvuissa 1 ... 100 kolmella jaollisia lukuja 33 kappaletta. Näistä 32 on hylättävä, joten suurimmillaan Taika voi kirjoittaa  $100 - 32 = 68$  lukua.

Parittomia lukuja, eli lukuja joissa ei ole tekijänä lukua 2, on välillä 1 ... 100 vain 50 kappaletta, mikä on pienempi kuin 68. Siis 68 on suurin mahdollinen määrä.

**27.**

Mitkä tahansa kolme kuution kärkeä muodostavat kolmion. Kuinka monta sellaista kolmiota on olemassa, joiden kärjet eivät ole kuution samalla tahkolla?

- (A) 16                      (B) 24                      **(C) 32**                      (D) 40                      (E) 48

**Ratkaisu:** Kuution yhdelle tahkolle voidaan asettaa kolmio neljällä eri tavalla niin, että valitaan kerrallaan kolme kärkipistettä ja neljäs kärkipiste jää yli. Tällaisia kolmioita on siis yhteensä neljä kappaletta tahkoa kohden ja  $6 \cdot 4 = 24$  koko kuutiossa.

Kuutiolla on yhteensä 8 kärkipistettä, joista saa 56 eri kolmiota. Jos kärjistä nimittäin valitaan kolme järjestyksessä, tapoja on  $8 \cdot 7 \cdot 6$ . Kolmioita on kuitenkin vähemmän, sillä jokaisen kolmion kärjet voidaan nimetä 6 eri järjestyksessä ( $3 \cdot 2 \cdot 1$ ). Kolmioita on siis yhteensä  $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} = 56$ . Haluttuja kolmioita on  $56 - 24 = 32$ .



28.

Tarkastellaan kaikkien niiden 7-numeroisten lukujen joukkoa, jotka on saatu käyttäen lukuun kaikkia numeroita 1, 2, 3, ..., 7. Kirjoita luvut suuruusjärjestyksessä pienimmästä aloittaen ja jaa lista täsmälleen kahteen samansuuruiseen osaan. Mikä on listan ensimmäisen puoliskon viimeinen luku?

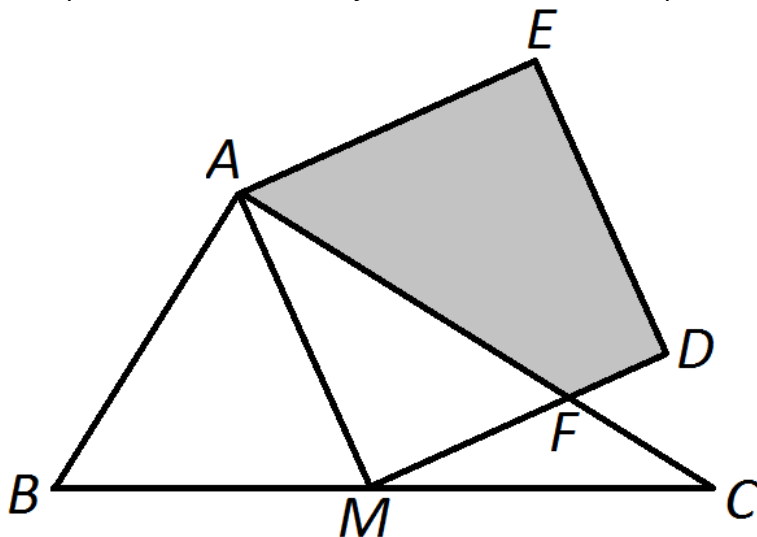
- (A) 1234567      (B) 3765421      (C) 4123567      (D) 4352617      **(E) 4376521**

**Ratkaisu:** Kun 7-numeroiset luvut kirjoitetaan suuruusjärjestyksessä, tulevat ensin kaikki luvut, jotka alkavat numerolla 1, sitten luvut, jotka alkavat numerolla 2 ja niin edelleen. Jokainen näistä lukusarjoista sisältää yhtä monta lukua, eli ykkösellä alkavia lukuja on yhtä monta kuin kakkosella alkavia lukuja ja niin edelleen. Lukulistan jakaminen kahtia vastaa siis numerosarjan 1 2 3 4 5 6 7 jakamista kahtia. Keskimäinen numero on numero 4, joten kysytty luku alkaa numerolla 4.

Vastaavasti numerolla 4 alkavat luvut on kirjoitettu järjestykseen, jossa ensin tulevat numeroilla 41 alkavat, sitten numeroilla 42, 43, 45, 46 ja 47. Kun lista jaetaan kahtia, ensimmäisen puoliskon viimeiseksi jäävät numeroilla 43 alkavat luvut. Kysytty luku on näistä viimeinen eli suurin, luku 4 376 521.

29.

Olkoon  $ABC$  kolmio, jossa  $AB = 6$  cm,  $AC = 8$  cm ja  $BC = 10$  cm, ja olkoon  $M$  sivun  $BC$  keskipiste.  $AMDE$  on neliö ja  $MD$  leikkaa sivun  $AC$  pisteessä  $F$ . Laske nelikulmion  $AFDE$  pinta-ala.

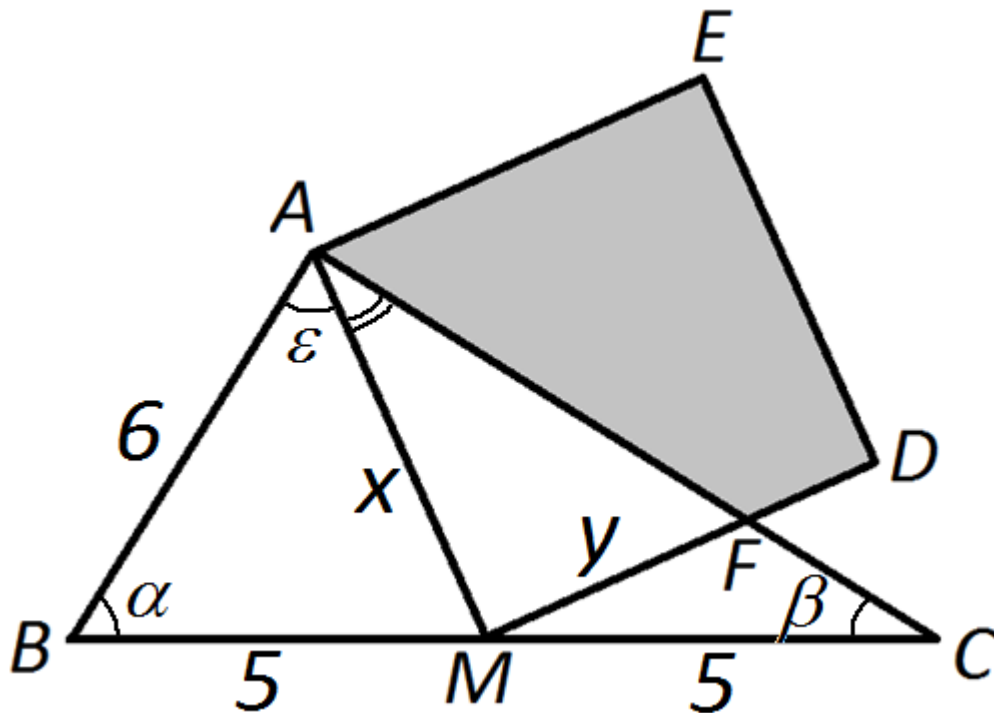


- (A)  $\frac{124}{8} \text{ cm}^2$       **(B)  $\frac{125}{8} \text{ cm}^2$**       (C)  $\frac{126}{8} \text{ cm}^2$       (D)  $\frac{127}{8} \text{ cm}^2$       (E)  $\frac{128}{8} \text{ cm}^2$

**Ratkaisu:** Merkitään kirjaimilla  $\alpha, \beta, \varepsilon$  kuvan mukaisesti kulmia  $B, C, A$  sekä sivua  $AM$  kirjaimella  $x$  ja sivua  $MF$  kirjaimella  $y$ . Kolmiossa  $ABC$  on  $6^2 + 8^2 = 10^2$ , joten kolmio  $ABC$  on



suorakulmainen. Siis  $\cos \alpha = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ . Kosinilauseen mukaan kolmiolle  $ABM$  pätee  $x^2 = 6^2 + 5^2 - 2 \cdot 6 \cdot 5 \cos \alpha$ , eli  $x = 5$ .



Koska  $M$  oli sivun  $BC$  keskipiste, on  $BM = 5$  cm ja toisaalta  $AM = 5$  cm. Siis kolmio  $ABM$  on tasakylkinen ja sen kantakulmat ovat yhtäsuuret:  $\alpha = \epsilon$ . Kulma  $BAC$  oli suora, joten kulma  $MAC = 90^\circ - \epsilon = 90^\circ - \alpha = \beta$ . Koska  $x = 5$ , saadaan

$$\frac{y}{5} = \tan(90^\circ - \epsilon) = \tan \beta = \frac{6}{8}$$

Siis

$$\begin{aligned} \frac{y}{5} &= \frac{6}{8} \\ y &= \frac{15}{4} \end{aligned}$$

Nelikulmion  $AEDF$  pinta-ala on  $A_{AEDF} = A_{AEDM} - A_{AMF} = x^2 - \frac{xy}{2} = 5^2 - \frac{5 \cdot \frac{15}{4}}{2} = \frac{125}{8}$ .



30.

Rivissä on 2014 henkilöä. Jokainen heistä on joko kelmi, joka valehtelee aina, tai ritari, joka aina kertoo totuuden. Jokainen henkilö sanoo "Vasemmalla puolellani on enemmän kelmejä kuin oikealla puolellani on ritareita." Kuinka monta kelmiä rivissä on?

- (A) 0                      (B) 1                      (C) 1007                      (D) 1008                      (E) 2014

**Ratkaisu:** Jokaisen rivissä seisovan ritarin vasemmalla puolella on enemmän kelmejä kuin tämän oikealla puolella on ritareita. Siis erityisesti näin on rivin kaikkein vasemmanpuoleisimman ritarin tapauksessa. Ritareita ei voi olla enempää kuin puolet rivistä, sillä muuten oikealta lukien 1008. ritarin oikealla puolella olisi 1007 ritaria ja vasemmalla puolella korkeintaan 1006 henkilöä, joten tämä ritari valehtelisi. Siis kelmejä on vähintään puolet henkilöistä eli 1007.

Toisaalta jokaisen rivissä seisovan kelmin vasemmalla puolella on vähemmän tai yhtä monta kelmiä kuin tämän oikealla puolella on ritareita. Jos kelmejä olisi enemmän kuin 1007, niin erityisesti vasemmalta lukien 1008. kelmin kohdalla tulisi olla, että hänen vasemmalla puolellaan on korkeintaan yhtä monta kelmiä kuin hänen oikealla puolellaan on ritareita. Tämä ei voi pitää paikkaansa, sillä hänen vasemmalla puolellaan on 1007 kelmiä ja oikealla puolellaan korkeintaan 1006 henkilöä. Siis kelmejä on täsmälleen 1007. Rivin vasen puoli on kelmejä ja oikea puoli ritareita.