



3 pistettä

Kysymys	1	2	3	4	5	6	7
Vastaus	B	A	E	B	C	E	D

4 pistettä

Kysymys	8	9	10	11	12	13	14
Vastaus	C	A	B	C	A	B	D

5 pistettä

Kysymys	15	16	17	18	19	20	21
Vastaus	C	A	D	D	C	D	D

Kengurulogon 2022 suunnitteli Sofia Girenko.



Association Kangourou
sans Frontières



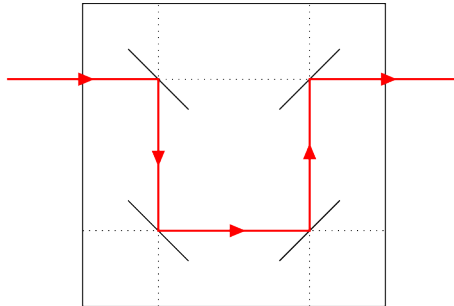
Maunulan yhteiskoulu
HELSINGIN MATEMATIIKKALUKIO



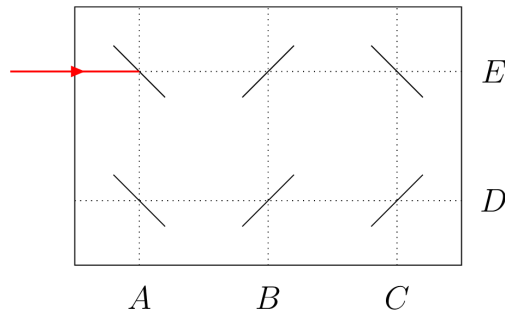


3 pistettä

1. Lasersäteet heijastuvat peileistä kuvassa näkyvällä tavalla.



Mihin kirjaimeseen alla näkyvä lasersäde osuu?



A) A

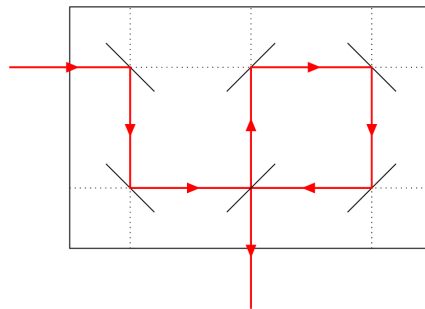
B) B

C) C

D) D

E) E

Ratkaisu. Peilit heijastavat sädettä näin:



Lasersäde osuu siis kirjaimeseen B.

2. $2022 + \square = 2020 + \square$

Mitkä kaksi lukua voidaan sijoittaa laatikoiden paikalle siten, että yllä näkyvä on totta?

A) 3 ja 5

B) 4 ja 1

C) 3 ja 4

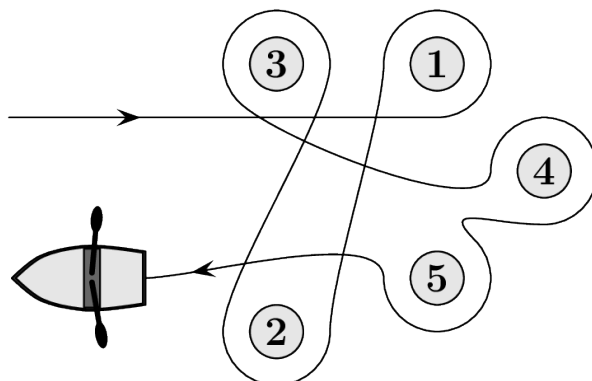
D) 7 ja 2

E) 9 ja 8

Ratkaisu. Huomataan, että luku 2022 on kahta suurempi kuin luku 2020. Siistä toiseen laatikkoon tulevan luvun on oltava kahta suurempi kuin ensimmäiseen laatikkoon tulevan luvun. Annetuista vaihtoehtoista ainoastaan luvut 3 ja 5 eroavat toisistaan kahdella, joten se on ainoa mahdollinen vaihtoehto. Koska $2022 + 3 = 2025$ ja $2020 + 5 = 2025$ on A oikea vastaus.



3. Eetu souti viiden poijun ympäri, kuten kuvassa näkyy.



Mitkä poijut Eetu kiersi vastapäivään?

- A) 1 ja 4 B) 2, 3 ja 5 C) 2 ja 3 D) 1, 4 ja 5 E) 1 ja 3

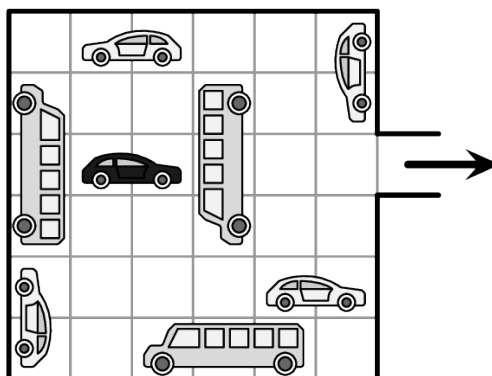
Ratkaisu. Kierretessä poiju vastapäivään se pysyy vasemmalla puolella. Näin on poijujen 1 ja 3 kohdalla, joten E on oikea vastaus.

4. Marmorikuulia myydään 5, 10 ja 25 kappaleen pakkauksissa. Suhaila ostaa tasan 95 kuulaa. Mikä on pienin määrä pakkauksia, joka hänen on ostettava?

- A) 4 B) 5 C) 7 D) 8 E) 10

Ratkaisu. Koska $25 + 25 + 25 + 10 + 10 = 95$, voi kuulat ostaa viidessä pakkauksessa. Jos pakkauksia ostaisi vain neljä, niin ne eivät voisi kaikki olla 25 kuulan pakkauksia, sillä $4 \cdot 25 = 100$. Jos neljästä pakkauksesta 25 kuulan pakkauksia olisi enintään kolme, niin kuulia ostettaisiin enintään $25 + 25 + 25 + 10 = 85$, mikä ei käy. Samoin, jos pakkauksia olisi enintään kolme, olisi niissä enintään $25 + 25 + 25 = 75$ kuulaa, mikä ei myöskään käy. Siten pakkauksia tarvitaan vähintään viisi. Vaihtoehto B on siis oikein.

5. Kuvan autotallissa autot voivat peruuttaa tai ajaa eteenpäin. Kuinka montaa autoa on siirrettävä, jotta musta auto pääsee ajamaan autotallista ulos?

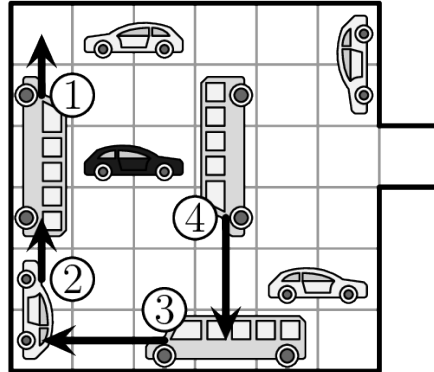


- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

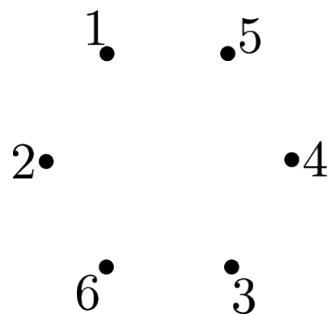
Ratkaisu. Mustan auton edessä oleva pitkä auto ei mahdu peruuttamaan niin paljoa, että musta auto mahtuisi sen ohi, joten edessä olevan pitkän auton on mentävä eteenpäin. Siispä sen edessä olevan auton on liikuttava, joka voi liikkua ainoastaan edessään olevan auton siirryttyä. Tätä varten mustan



auton takana olevan pitkän auton on liikuttava ensin. Kuvassa näkyy autojen liikkumisjärjestys. Siispä neljän auton on siirryttävä eli vaihtoehto C on oikein.

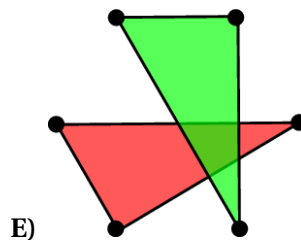
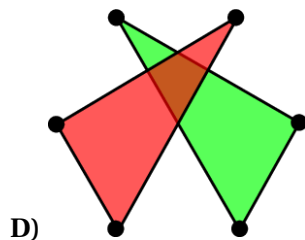
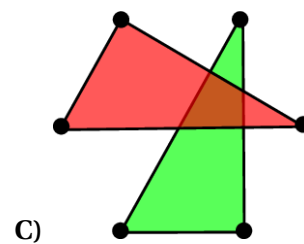
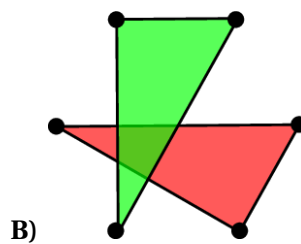
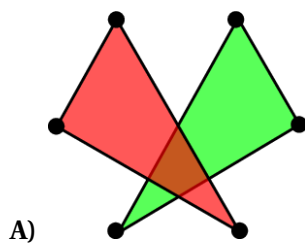


6. Kuusi pistettä on numeroitu kuvassa näkyvällä tavalla.



Kertu yhdistää parittomasti numeroidut pisteet janoilla kolmioksi ja tekee samoin parillisesti numeroiduille pisteille. Toisen kolmioista hän värittää punaisella ja toisen vihreällä.

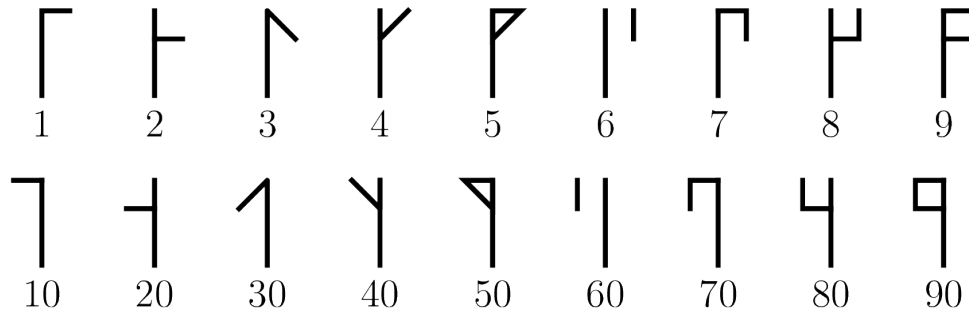
Mikä vaihtoehdoista kuvaa Kertun piirtämää kuviota?






Ratkaisu. 1, 3 ja 5 ovat parittomia ja 2, 4 ja 6 parillisia lukuja. Yhdistämällä parittomat keskenään ja parilliset keskenään saadaan kuvio E.



7. Sisterssiläisiä numeroita käytettiin 1200-luvun alussa. Mikä tahansa kokonaisluku välillä 1 – 99 voitiin esittää yhtenä merkinä yhdistämällä sopivasti kaksi alla olevista merkeistä:



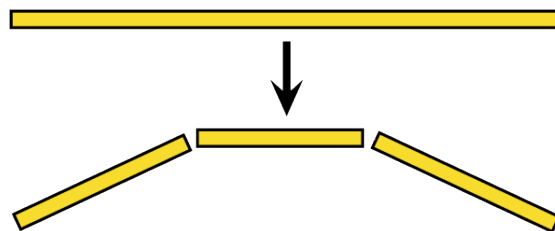
Lukua 24 ilmaisee merkki , lukua 81 ilmaisee merkki  ja lukua 93 ilmaisee merkki . Mikä merkki ilmaisee lukua 45?

- A)  B)  C)  D)  E) 

Ratkaisu. Huomataan, että luku ilmaistaan piirtämällä kymmeniä ja ykkösiä kuvaavat merkit päällekkäin siten, että pitkä pystysuora viiva on merkeille yhteinen. Luku 45 voidaan esittää summana $40 + 5$, joten se saadaan yhdistämällä lukuja 40 ja 5 ilmaisevat merkit. Siispä D on oikea vaihtoehto.

4 pistettä

8. Samuelilla on pitkä pätkä kuivaa spagettia, jonka hän haluaa katkoa pieniksi paloiksi. Joka kerta, kun Samuel katkaisee pätkän, se katkeaa kahdesta kohtaa muodostaen kolme pienempää pätkää, kuten kuvassa näkyy.



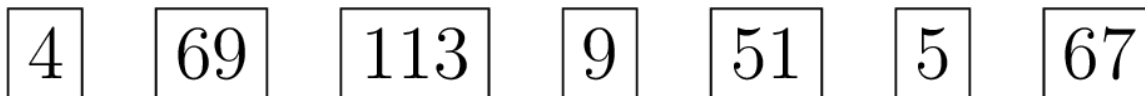
Mikä seuraavista ei voi olla lopuksi Samuelin pätkien lukumäärä?

- A) 13 B) 17 C) 20 D) 23 E) 25

Ratkaisu. Aina kun Samuel katkaisee spagettipätkän pätkien määrä kasvaa kahdella. Katkomalla pätkiä Samuel voi lisätä niiden lukumäärää vain parillisen määrän verran. Alussa Samuelilla oli yksi pätkä eli pariton määrä ja jos siihen lisää parillisen määrän, on lopullinen pätkien lukumäärä pariton. Annetuista vaihtoehdoista kaikki muut ovat parittomia paitsi 20, joten se ei käy. Siispä C on oikea vastaus.



9. Mesillä on nämä 7 laatua:



Hän haluaa järjestää ne siten, että saatu 12-numeroinen luku on pienin mahdollinen.

Mitkä ovat kyseisen luvun 3 viimeistä numeroa?

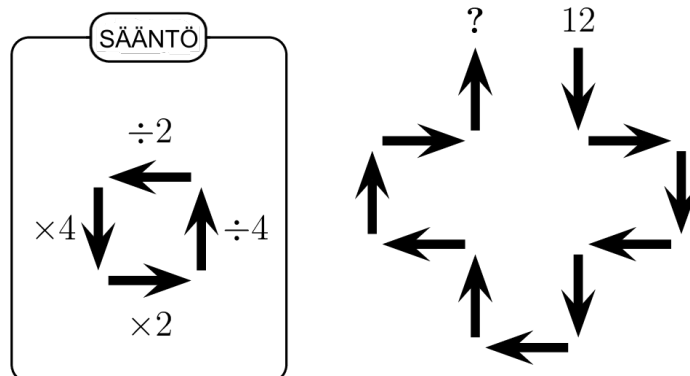
- A) 699 B) 113 C) 551 D) 967 E) 459

Ratkaisu. Laatoissa on yhteensä 12 numeroa, joten Mesin on käytettävä ne kaikki. Saadakseen pienimmän mahdollisen luvun, on paikkajärjestelmässä vasemmalla olevien numeroiden oltava pienimmät mahdolliset.

Ensimmäiseksi on siis valittava numerot 113 sisältävä laatta, sillä muut laatat eivät ala numerolla 1. Tämän jälkeen pienimmällä numerolla alkaa laatta 4. Tätä seuraaviksi laatoiksi valitaan 51 ja 5, sillä jos olisi valittu 5 ja vasta sitten 51, olisivat viidennestä seitsemänteen numerot olleet 551, joka on suurempi luku kuin 515. Vastaavasti seuraavat laatat ovat 67, 69 ja 9.

Näin kolme viimeistä numeroa ovat 699, joten A on oikea vastaus.

10. Taher aloittaa luvusta 12 ja suorittaa kuvassa näkyvien nuolten laskutoimitukset järjestyksessä säännön mukaisesti.



Mikä luku kuuluu kysymysmerkin paikalle viimeisen laskutoimituksen jälkeen?

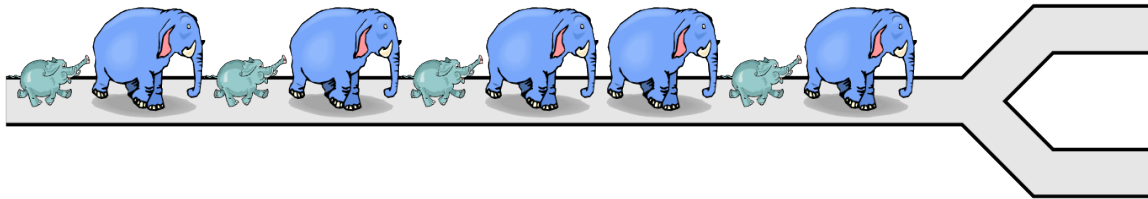
- A) 3 B) 6 C) 12 D) 24 E) 48

Ratkaisu. Huomataan, että vastakkaisiin suuntiin osoittavien nuolten laskutoimitukset kumoavat toisensa. Koska alaspäin osoittavia nuolia on yhtä monta kuin ylöspäin osoittavia, ne eivät kumpikaan vaikuta lopputulokseen.

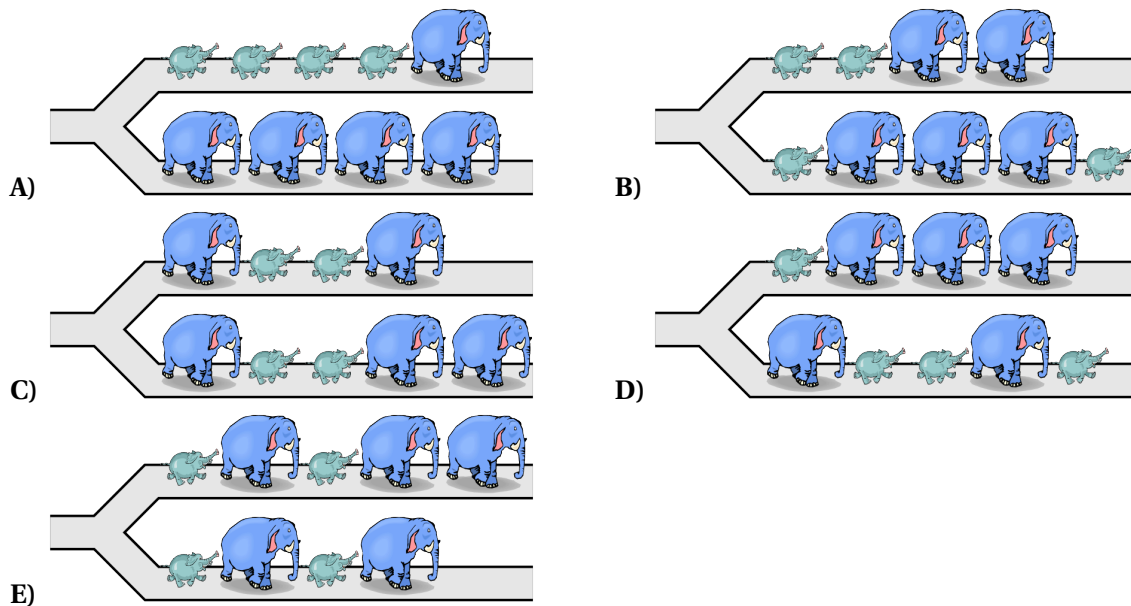
Vasemmalle osoittavia nuolia sen sijaan on kolme, joka on yksi enemmän kuin oikealle osoittavia nuolia, joten ainoa laskutoimitus, joka ei kumoudu, on kahdella jakaminen. Siispä lopputulos on $\frac{12}{2} = 6$. B on siis oikein.



11. Viisi isoa ja neljä pientä elefanttia kävelevät peräkkäin tiellä, kuten kuvasta näkyy.



Risteyksessä jokainen elefantti kääntyy joko oikealle tai vasemmalle. Mikä seuraavista tilanteista ei ole mahdollinen sen jälkeen, kun kaikki elefantit ovat kääntyneet risteyksestä?



Ratkaisu. Jonon viimeinen elefantti on pieni, joten lopputilanteessa ainakin toisessa jonossa pitäisi viimeisenä olla pieni elefantti. Ainoastaan vaihtoehdossa C näin ei ole, joten se ei ole mahdollinen. Tarkistetaan vielä, että muut tilanteet ovat mahdollisia.

A: Ensimmäiset kaksi elefanttia kääntyvät vasemmalle, minkä jälkeen isot elefantit kääntyvät kaikki oikealle ja pienet vasemmalle.

B: Elefantit kääntyvät järjestyksessä vasen-oikea-vasen-oikea-vasen-oikea-vasen-oikea-oikea.

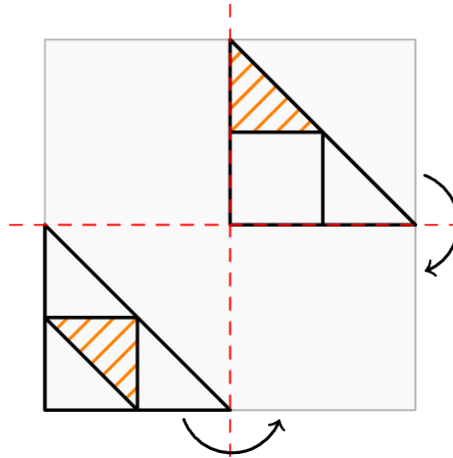
D: Elefantit kääntyvät järjestyksessä vasen-oikea-vasen-oikea-oikea-vasen-oikea-oikea-vasen.

E: Elefantit kääntyvät järjestyksessä oikea-oikea-vasen-vasen-vasen-vasen-vasen-oikea-oikea.

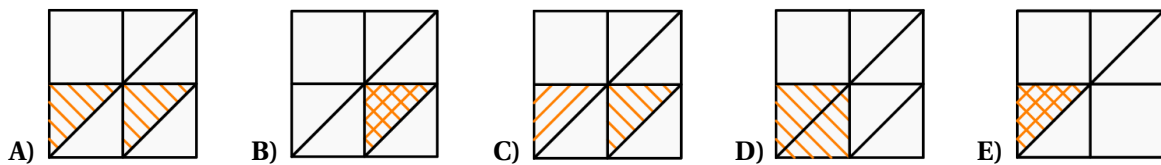
Siispä C on oikea vastaus.



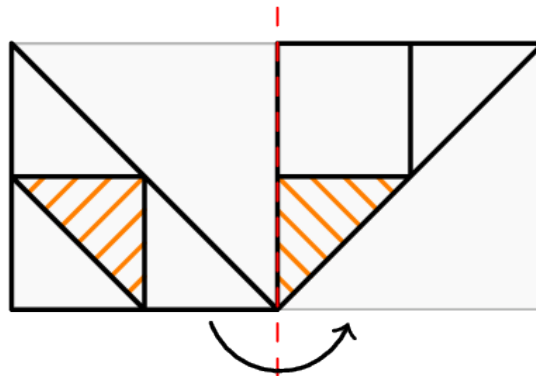
12. Neliön muotoiseen läpinäkyvään paperiin on piirretty kuvassa näkyvät kuviot.



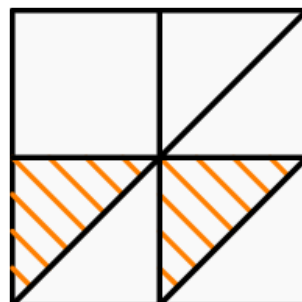
Suvi taittelee paperipalan kahdesti kuvassa esitetyllä tavalla. Miltä taitettu paperi näyttää?



Ratkaisu. Jos Suvi taittaa paperin ensin ylhäältä alas, se näyttää tältä:

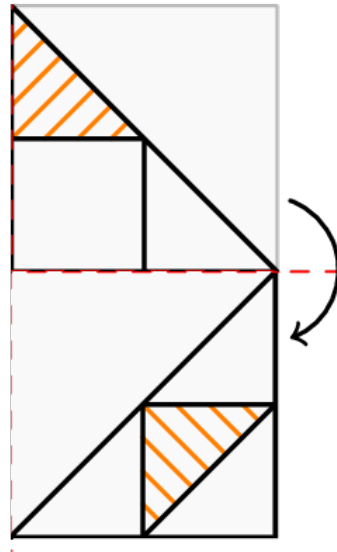


Toisen taitoksen jälkeen paperi näyttää tältä:



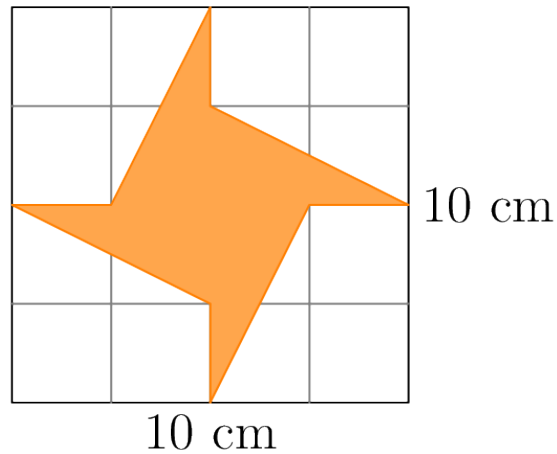
Tämä on sama kuin vaihtoehdossa A.

Suvi olisi voinut taittaa paperin ensin myös vasemmalta oikealle:



Toisen taitoksen jälkeen myös tämä on sama kuin vaihtoehdossa A, joten se on oikea vastaus.

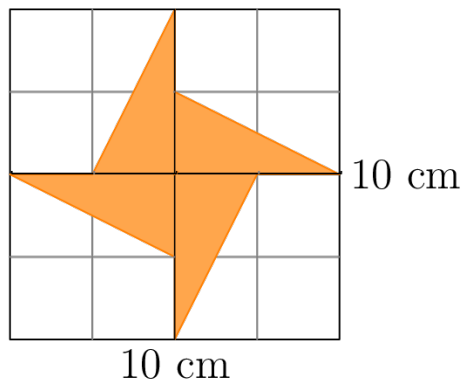
13. Kuvassa näkyvän ison neliön pinta-ala on 100 cm^2 .



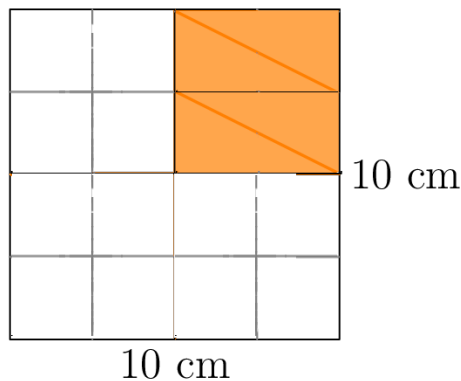
Mikä on väritetyn alueen pinta-ala?

- A) 20 cm^2 B) 25 cm^2 C) 30 cm^2 D) 35 cm^2 E) 40 cm^2

Ratkaisu. Väritetty kuvio koostuu neljästä keskenään yhtä suuresta kolmiosta:



Nämä kolmiot voidaan asettaa neliöön myös näin:



Kolmiot muodostavat siis neljäsosan koko neliön pinta-alasta, joten väritetty alue on suuruudeltaan $100 \text{ cm}^2 : 4 = 25 \text{ cm}^2$. Vaihtoehto B on siis oikein.

14. Vuosiluku 2022 on siitä erikoinen, että siinä esiintyy numero 2 kolmesti. Tämä on kolmas kerta Kille-kilpikonnän elämän aikana, kun vuosiluvussa on kolme samaa numeroa. Mikä on Kille-kilpikonnän pienin mahdollinen ikä vuoden 2022 viimeisenä päivänä?

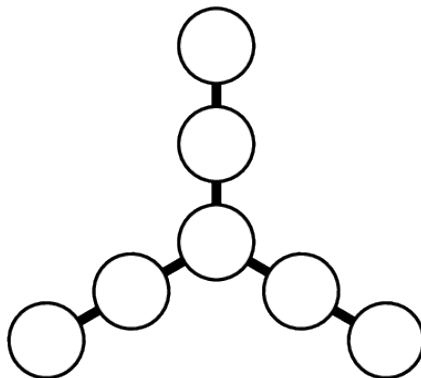
- A) 18 vuotta B) 20 vuotta C) 22 vuotta D) 23 vuotta E) 134 vuotta

Ratkaisu. Ennen vuotta 2022 edellinen kolme samaa numeroa sisältänyt vuosiluku oli 2000. Tätä edelsi niin ikään kolmen saman numeron vuosiluku 1999. Kille voi siis olla syntynyt tuona vuonna, jolloin hän olisi vuoden viimeisenä päivänä $2022 - 1999 = 23$ vuotta vanha. Siispä vaihtoehto D on oikein.



5 pistettä

15. Casperilla on käytössään luvut 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ja 9. Hän kirjoittaa niistä seitsemän kuvassa näkyvien ympyröiden sisään siten, että kolmen samalla suoralla olevan luvun summa on jokaisella suoralla sama.



Mikä on suurin mahdollinen samalla suoralla olevien lukujen summa?

- A) 16 B) 18 C) 20 D) 22 E) 28

Ratkaisu. Summa on suurin kun luku 9 kirjoitetaan keskimmäisen ympyrän sisään. Jotta suorilla olevat summat olisivat kaikkialla samat, on samoille suorille kirjoitettava parit, joiden summa on suurin mahdollinen. Tällaisia ovat 8 ja 3, 7 ja 4 sekä 6 ja 5. Samalla suoralla olevien lukujen summa on siten $9 + 8 + 3 = 20$. C on siis oikea vastaus.

16. Topilla on 4 koiraa. Topi on punninnut koirat kokonaisten kilogrammojen tarkkuudella. Jokainen koira painaa vähintään 1 kilogramman eikä yhdenkään koiran paino ole sama kuin toisen koiran. Koirien painojen summa on 60 kg. Toiseksi painavin koira painaa 28 kg. Kuinka painava kolmanneksi painavin koira on?

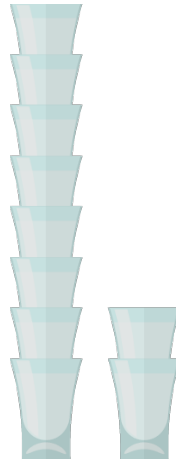
- A) 2 kg B) 3 kg C) 4 kg D) 5 kg E) 6 kg

Ratkaisu. Painavimman koiran on painettava 29 kg, sillä jos se painaisi esim. 30 kg, olisi kahden kevyimmän koiran painettava yhteensä $60 - 30 - 28 = 2$ (kg), mikä ei ole mahdollista, sillä ne eivät voi molemmat painaa 1 kilogrammaa.

Kaksi kevyintä koiraa painavat siis 1 kg ja 2 kg. Toiseksi kevyin koira (2 kg) on kolmanneksi painavin, joten vaihtoehto A on oikein.



17. 10 keskenään samanlaista lasia on pinottu kahteen pinoon, kuten kuvassa.



8 lasin pinon korkeus on 42 cm ja 2 lasin pinon korkeus on 18 cm. Kuinka korkea olisi 6 lasin pino?

- A) 22 cm B) 24 cm C) 28 cm D) 34 cm E) 40 cm

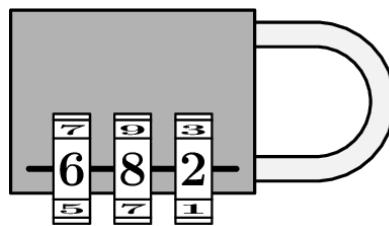
Ratkaisu. Koska lasit menevät osittain sisäkkäin, saadaan pinon korkeus yhden lasin korkeuden ja loppujen lasien ulos jäävien osien korkeuksien summana.

Kun 8 lasin pinon korkeudesta vähentää 2 lasin pinon korkeuden, saadaan 6 lasin ulos jäävien osien yhteiskorkeus: $42 \text{ cm} - 18 \text{ cm} = 24 \text{ cm}$. Yhden lasin ulos jäävän osan korkeus on siten kuudesosa tästä eli $24 \text{ cm} : 6 = 4 \text{ cm}$. Kuuden lasin pinon korkeus saadaan siis laskemalla yhteen kahden lasin pinon korkeus ja neljän lasin ulos jäävät osat:

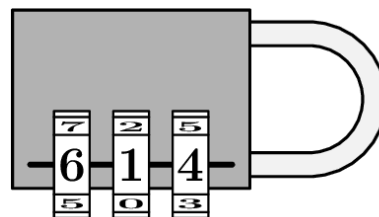
$$18 \text{ cm} + 4 \cdot 4 \text{ cm} = 18 \text{ cm} + 16 \text{ cm} = 34 \text{ cm}.$$

Vaihtoehto D on siis oikein.

18. Kuvissa näkyvän lukon avaava numerosarja voidaan selvittää seuraavien neljän vihjeen avulla. Alla olevassa numerosarjassa on tasan yksi oikea numero ja se on oikeassa kohdassa:



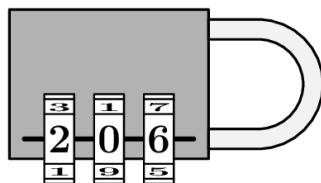
Seuraavassa numerosarjassa on tasan yksi oikea numero, mutta se on väärässä kohdassa:



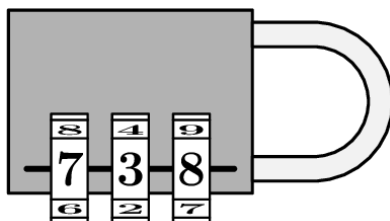
Seuraavassa numerosarjassa on tasan kaksi oikeaa numeroa, mutta ne ovat molemmat väärissä koh-



dissa:



Kaikki alla olevan numerosarjan numeroista ovat väärä:



Mikä on lukon avaava numerosarja?

A) 604

B) 082

C) 640

D) 042

E) 046

Ratkaisu. Koska viimeisen kuvan kaikki numerot 7, 3 ja 8 ovat väärä, on ensimmäisessä kuvassa joko numeron 6 tai 2 oltava oikein ja oikealla paikalla. Toisen vihjeen perusteella se ei voi olla numero 6, sillä muuten se olisi siinäkin oikealla paikalla, mikä on vastoin vihjettä. Näin ollen ensimmäisessä kuvassa numero 2 on oikealla paikalla eli viimeisenä, eikä lukon avaavassa numerosarjassa ole numeroa 6.

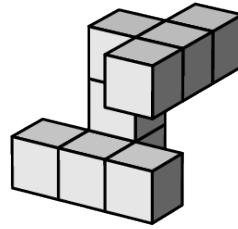
Koska numeron 2 on siis oltava numerosarjassa viimeisenä ja kolmannen vihjeen nojalla numeron 0 on oltava numerosarjassa eri paikalla kuin vihjeen kuvassa, voidaan päätellä, että 0 on numerosarjan ensimmäinen numero. Numerosarja on siis muotoa 0x2.

Numerosarjan keskimäinen numero selviää toisesta vihjeestä. Kuten on todettu, numero 6 ei ole oikeassa numerosarjassa lainkaan. Myöskään numeroa 1 siinä ei voi olla, sillä toisen vihjeen perusteella sen tulisi muuten olla ensimmäisenä tai viimeisenä, mutta nämä numerot jo tunnetaan. Tästä voidaan päätellä, että puuttuva numero on 4, ja sen tulee olla puuttuvalla paikalla eli numerosarjan keskimäisenä.

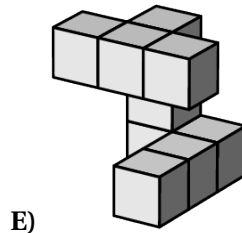
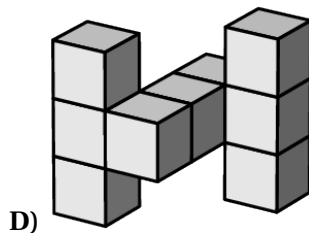
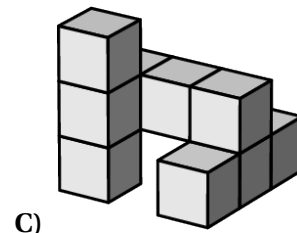
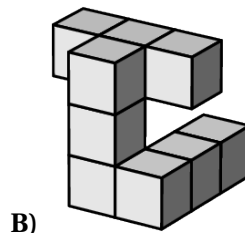
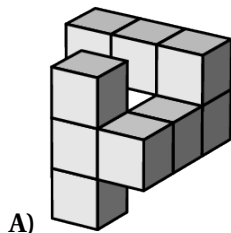
Lukon avaava numerosarja on siis 042, joten vaihtoehto D on oikein.



19. Emma tutkii kuvassa näkyvää kappaletta.



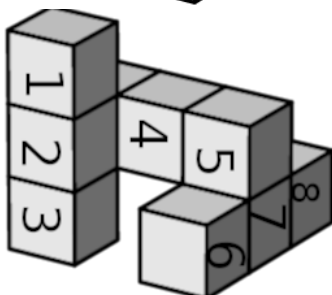
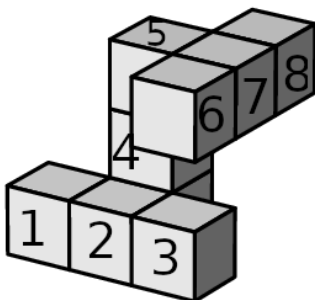
Mikä seuraavista kappaleista on samanlainen kuin Emmalla?



Ratkaisu. Kaikki kappaleet on muodostettu kolmesta kolmen kuution jonosta siten että kaksi jonoista on kiinni samassa jonossa, mutta ne eivät ole toisissaan kiinni.

Emman kappaleessa vaakasuorassa olevat kaksi jonoa ovat kiinni keskimmäisen kuution kohdalta kolmannessa eli pystysuorassa olevassa jonossa. Näin on ainoastaan vaihtoehdoissa C ja D, joten ne ovat ainoat mahdolliset vaihtoehdot.

Vaihtoehto D ei kuitenkaan ole oikea, sillä siinä mainitut kaksi jonoa ovat samansuuntaisia keskenään, kun taas Emman kappaleessa ne ovat erisuuntaiset. Jäljelle jää siis vaihtoehto C, joka huomataan oikeaksi kääntämällä kappaletta. Kappaleiden kuutiot vastaavat toisiaan näin:





20. Kylät A, B, C ja D ovat saman tien varrella tässä järjestyksessä. Naapurikylien välinen etäisyys on 10 km. Kylässä A asuu 10 opiskelijaa, kylässä B 20 opiskelijaa, kylässä C 30 opiskelijaa ja kylässä D 40 opiskelijaa.

Koulu halutaan rakentaa sellaiseen paikkaan, että kaikkien opiskelijoiden yhteenlaskettu koulumatka olisi mahdollisimman pieni. Mihin koulu pitää rakentaa?

- A) kylään A B) kylään B C) kylien B ja C välille
D) kylään C E) kylään D

Ratkaisu. Opiskelijoita on yhteensä $10 + 20 + 30 + 40 = 100$.

Yli puolet opiskelijoista asuu kylissä C ja D, joten koulu kannattaa rakentaa mahdollisimman lähelle niitä.

Jos koulu rakennetaan kylään C, on yhteelaskettu koulumatka

$$10 \cdot 20 \text{ km} + 20 \cdot 10 \text{ km} + 30 \cdot 0 \text{ km} + 40 \cdot 10 \text{ km} = 200 \text{ km} + 200 \text{ km} + 0 \text{ km} + 400 \text{ km} = 800 \text{ km}.$$

Jokainen kilometri kohti kylää B lyhentää kyläläisten A ja B koulumatkaa kilometrillä mutta pidentää sekä kyläläisten C että D koulumatkaa yhtä paljon. Kokonaiskoulumatka siis pitenisi jokaiselta kohti kylää B siirretyltä kilometriltä $40 \cdot 1 \text{ km} + 30 \cdot 1 \text{ km} - 20 \cdot 1 \text{ km} - 10 \cdot 1 \text{ km} = 40 \text{ km} + 30 \text{ km} - 20 \text{ km} - 10 \text{ km} = 40 \text{ km}$.

Vastaavasti jokainen kohti kylää D siirretty kilometri lyhentäisi kyläläisten D matkaa, mutta pidentäisi muiden matkaa, joten kokonaiskoulumatka pitenisi $30 \cdot 1 \text{ km} + 20 \cdot 1 \text{ km} + 10 \cdot 1 - 40 \cdot 1 \text{ km} = 30 \text{ km} + 20 \text{ km} + 10 \text{ km} - 40 \text{ km} = 20 \text{ km}$.

Siispä koulu kannattaa rakentaa kylään C.

21. Pyöreän pöydän ympärillä istuu 30 henkilöä, joista osalla on hattu päässään. Kaikki, joiden päässä on hattu, puhuvat aina totta. Ne, joiden päässä hattua ei ole, puhuvat joskus totta, mutta saattavat myös valehdella.

Jokainen pöydän ympärillä istuva sanoo "Vieressäni istuvista kahdesta henkilöstä ainakin yhdellä ei ole hattua päässään".

Kuinka monta hattupäistä henkilöä pöydän ympärillä enintään istuu?

- A) 5 B) 10 C) 15 D) 20 E) 25

Ratkaisu. Jos henkilöllä on hattu päässään, on toisen hänen vieressään istuvista oltava hatuton, sillä hän puhuu totta. Vähintään kolmasosan on oltava hatuttomia: henkilöt voi osittaa kymmeneen kolmen vierekkäisen henkilön joukkioon, joista jokaisessa joko keskimäinen on hatuton tai keskimäinen on hatullinen ja ainakin toinen hänen naapureistaan hatuton, jolloin jokaisessa ryhmitymässä on enintään kaksi hatullista henkilöä, ja hatullisia on täten enintään $10 \cdot 2 = 20$.

Todetaan vielä, että 20 hatullisen tilanne on mahdollinen. Esimerkiksi numeroimalla istujat järjestyksessä 1 – 30 kaikki luvulla 3 jaollisen järjestyksessä istujat voisivat olla hatuttomia ja loput hatullisia, sillä tällöin järjestyksessä 30 olisi hatuton ja tämän molemmilla puolilla kaksi seuraavaa hatullisia. Koska luvuista 1 – 30 kymmenen lukua on jaollisia luvulla 3, on hatuttomia 10 kpl ja hatullisia näin ollen 20 kpl. Vaihtoehto D on siis oikein.