Student RATKAISUT

KENGURU 2023

Tehtävien ratkaisut

3 pistettä

Kysymys	1	2	3	4	5	6	7	8
Vastaus	D	D	C	E	D	C	B	E

4 pistettä

Kysymys	9	10	11	12	13	14	15	16
Vastaus	E	C	D	B	A	C	B	B

5 pistettä

Kysymys	17	18	19	20	21	22	23	24
Vastaus	B	E	A	C	C	C	B	B

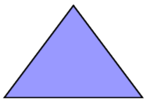
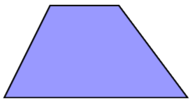
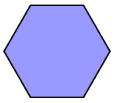
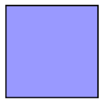
Association Kangourou sans Frontières

MAUNULAN YHTEISKOULU
Helsingin matematiikkalukio

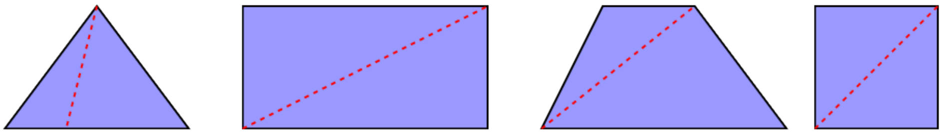
Teknologiateollisuuden 100-vuotissäätiö

3 pistettä

1. Mitä seuraavista kuvioista ei voi pilkkoa kahdeksi kolmioksi yhdellä suoralla viivalla?

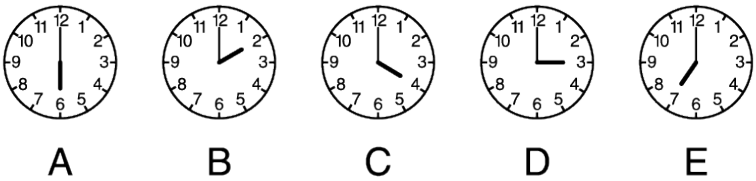
A)  **B)**  **C)**  **D)**  **E)** 

Ratkaisu. Vastausvaihtoehtojen a), b), c) ja e) monikulmiot voi kuin voikin pilkkoa yhdellä suoralla kahdeksi kolmioksi:



Vastausvaihtoehdon d) kuusikulmiolle tämä ei kuitenkaan ole mahdollista, sillä pilkottaessa se kahdeksi uudeksi kuvioksi yhdellä suoralla, on uusien kuvioiden oltava myös monikulmioita, joiden kärkien summan täytyisi olla vähintään $6+2=8$, jolloin ainakin toisessa niistä täytyy olla vähintään 4 kärkeä. Täten oikea vastausvaihtoehto on d).

2. Seinällä on viisi kelloa. Tiedämme, että yksi kelloista edistää tunnilla, yksi kelloista on tunnin jäljessä, yksi kelloista näyttää oikeaa aikaa, ja kaksi kelloista on pysähtyneitä. Mikä kelloista näyttää oikeaa aikaa?



A) A **B)** B **C)** C **D)** D **E)** E

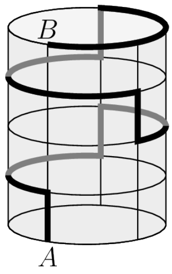
Ratkaisu. Kelloista joidenkin kolmen ajan täytyy muodostaa aritmeettinen jono, jossa peräkkäisten termien erotus on yhden tunnin suuruinen. Kellonajat ovat 6:00, 2:00, 4:00, 3:00, ja 7:00, ja näistä tällaisen aritmeettisen jonon voi muodostaa vain kellonajoilla 2:00, 3:00 ja 4:00, joten oikea kellonaika voi olla vain keskimmäinen näistä, eli kellon D näyttämä aika 3:00.

3. Giulia heittää viittä noppaa. Noppien silmälukujen summa on 19. Kuinka monta noppaa voi enintään näyttää silmälukua 6?

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

Ratkaisu. Jos vähintään kolme nopista näyttäisi silmälukua 6, olisi silmälukujen summa vähintään $3\cdot 6+1+1=20>19$. Siten enintään kaksi nopista voi näyttää silmälukua 6. Toisaalta kaksi nopista todella voi näyttää silmälukua 6, sillä esimerkiksi $6+6+5+1+1=19$.

4. Suoran ympyrälieriön muotoisen purkin korkeus on 15 cm ja sen ympyrän muotoisen pohjan ympärysmitta on 30 cm. Pieni muurahainen kävelee pohjan pisteestä A katon pisteeseen B. Hän kulkee joko suoraan ylöspäin tai vaakatasossa ympyränkaarta pitkin purkin ympäri. Hänen polkunsa on merkitty kuvaan paksulla viivalla (mustalla purkin etuosassa ja harmaalla purkin takana). Mikä on muurahaisen kulkeman polun pituus?



A) 45 cm **B)** 55 cm **C)** 60 cm **D)** 65 cm **E)** 75 cm

Ratkaisu. Muurahainen kulkee pystysuoraan pituuden, joka vastaa purkin korkeutta 15 cm. Toisaalta muurahainen kulkee vaakasuoraan kahdesti purkin ympäri, eli vaakasuorasti $2 \cdot 30\,\text{cm} = 60\,\text{cm}$. Yhteensä muurahainen siis kulkee $15\,\text{cm} + 60\,\text{cm} = 75$ cm.

5. Kaksi positiivista kokonaislukua m ja n ovat molemmat parittomia. Mikä seuraavista kokonaisluvuista on myös pariton?

A) $m(n+1)$ **B)** $(m+1)(n+1)$ **C)** $m+n+2$ **D)** $mn+2$ **E)** $m+n$

Ratkaisu. Koska m ja n ovat molemmat parittomia, $m+1$, $n+1$ ja $m+n$ ovat kaikki parillisia, joten vaihtoehtojen a), b), c) ja e) luvut ovat kaikki myös parillisia. Jäljelle jää vain vaihtoehdo d). Koska mn on kahden parittoman luvun tulona pariton, d)-kohdan luku $mn+2$ on kuin onkin pariton.

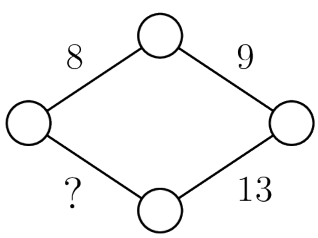
6. Laske $\dfrac{7777^2}{5555 \cdot 2222}$.

A) 1 **B)** $\dfrac{7}{10}$ **C)** $\dfrac{49}{10}$ **D)** $\dfrac{77}{110}$ **E)** 49

Ratkaisu. Tässä 1111^2 esiintyy osoittajan ja nimittäjän yhteisenä tekijänä, joten voimme sieventää

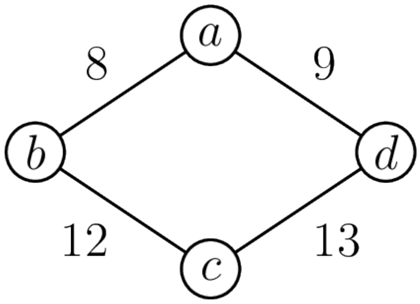
$$\frac{7777^2}{5555 \cdot 2222} = \frac{7^2 \cdot 1111^2}{5 \cdot 1111 \cdot 2 \cdot 1111} = \frac{7^2}{5 \cdot 2} = \frac{49}{10}.$$

7. Werner haluaisi kirjoittaa kuvan vinoneliön jokaiseen kärkeen ja jokaiselle särmälle luvun niin, että jokaisen särmän luku olisi yhtä suuri kuin saman särmän kärkien lukujen summa. Mikä luku hänen täytyy kirjoittaa kysymysmerkin kohdalle?



A) 11 **B)** 12 **C)** 13 **D)** 14 **E)** 15

Ratkaisu. Voimme todeta, että kahden vastakkaisen särmän kärkien lukujen summien summa on sama kuin toisten kahden vastakkaisen särmän. Siten tapauksessamme kysymysmerkin kohdalle on kirjoitettava luku $8 + 13 - 9 = 12$.



(Kuvan merkinnöillä siis $8 + 13 = a + b + c + d = d + a + b + c = 9 + ?$, joten $? = 8 + 13 - 9 = 12$.)

8. Kun laskemme

$$\left(5^5 + 1\right)\left(5^{10} + 1\right)\left(5^{15} + 1\right),$$

mikä on lopputuloksen viimeinen numero?

A) 1 **B)** 2 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

Ratkaisu. Voimme hyödyntää sitä seikkaa, että positiivisten kokonaislukujen tulon viimeinen numero riippuu vain tulontekijöiden viimeisistä numeroista. Numeroon 5 päättyvien lukujen tulo päättyy aina numeroon 5, joten potenssit 5^5, 5^{10} ja 5^{15} päättyvät numeroon 5. Kun näihin potensseihin lisätään 1, päättyvät kaikki summat numeroon 6. Siten tehtävänannon lauseke on kolmen numeroon 6 päättyvän luvun tulo, joten sen on myös päätyttävä numeroon 6.

4 pistettä

9. Jenni yrittää säästää vettä. Hän vähensi suihkussa käyttämäänsä aikaa neljänneksellä. Hän myös vähensi suihkunsa hanasta tulevan veden määrää neljänneksellä. Kuinka suuren osuuden suihkuihinsa käyttämästään vedestä Jenni pystyi säästämään?

A) $\frac{1}{4}$ **B)** $\frac{3}{8}$ **C)** $\frac{5}{8}$ **D)** $\frac{5}{12}$ **E)** $\frac{7}{16}$

Ratkaisu. Kaiken kaikkiaan Jenni käyttää $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$ siitä vedestä, jonka hän käytti alun perin. Siten hän vähensi vedenkäyttöään $\frac{7}{16}$.

10. Johto, jonka pituus on 95 m leikataan kolmeen osaan niin, että toinen osa on 50 % pidempi kuin ensimmäinen, ja kolmas osa 50 % pidempi kuin toinen. Kuinka pitkä on pisin osa?

A) 36 m **B)** 42 m **C)** 45 m **D)** 46 m **E)** 48 m

Ratkaisu. Jos kahden johdon pituudet ovat a ja b, ja jos edellinen on 50 % pidempi kuin jälkimmäinen, niin $a = 3b/2$, jolloin $b = 2a/3$. Tämän perusteella, jos x on pisimmän kolmannen osan pituus, niin toisen osan pituus on $2x/3$, ja ensimmäisen $4x/9$. Siten pätee yhtälö

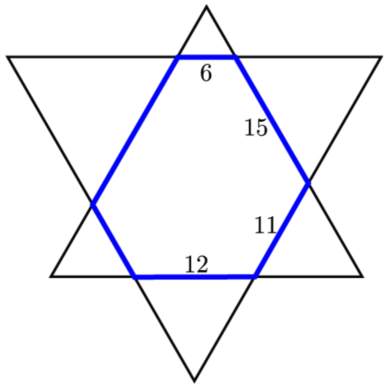
$$\frac{4x}{9} + \frac{2x}{3} + x = 95\,\mathrm{m},$$

tai yksinkertaisemmin

$$\frac{19x}{9} = 95\,\mathrm{m},$$

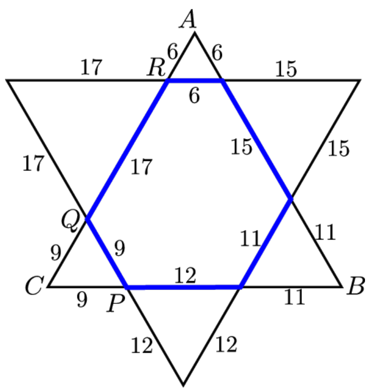
mistä voimme ratkaista $x = 45\,\mathrm{m}$.

11. Tasasivuinen kolmio piirretään toisen tasasivuisen kolmion päälle, luoden kuusikulmion, jossa vastakkaiset sivuparit ovat yhdensuuntaisia. Tiedämme kuusikulmion sivujen pituuksista neljä, kuten kuvassa. Mikä on kuusikulmion piiri?



A) 64 **B)** 66 **C)** 68 **D)** 70 **E)** 72

Ratkaisu. Merkitkäämme kuvioon pisteet A, B, C, P, Q ja R, kuten kuvassa alla. Koska vastakkaiset sivuparit ovat yhdensuuntaisia, ovat muodostuneen tähden kärjet kaikki tasasivuisia kolmioita. Siten kolmion $\triangle ABC$ sivun AB pituus on $6 + 15 + 11 = 32$, jolloin myös sivun BC pituus on 32, ja edelleen $PC = 32 - (12 + 11) = 9$ ja $QR = 32 - (9 + 6) = 17$. Kysytty piiri on siis $6 + 15 + 11 + 12 + 9 + 17 = 70$.



12. Maria, Peter, Richard ja Tina pelasivat jalkapalloa luokassa ja rikkoivat ikkunan. Kun rehtori kysyi, kuka on syyllinen, hän sai tällaiset vastaukset:
Maria: ”Syyllinen on Peter.”
Peter: ”Syyllinen on Richard.”
Richard: ”Minä en ole syyllinen.”
Tina: ”Minä en ole syyllinen.”
Vain yksi heistä puhui totta. Kuka rikkoi ikkunan?

A) Maria **B)** Tina **C)** Peter **D)** Richard **E)** Ei voi määrittää varmuudella.

Ratkaisu. Richard puhuu totta jos ja vain jos Peter valehtelee. Koska vain yksi puhuu totta, puhuu totta joko Peter tai Richard. Erityisesti Maria ja Tina molemmat valehtelevat, joten Tina rikkoi ikkunan.

13. Positiivisille kokonaisluvuille n, kertoma $n!$ määritellään kokonaislukujen 1, 2, 3, ..., n tuloksi. Esimerkiksi, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$. Mikä on luvun n numeroiden summa, jos $n! = 6! \cdot 7!$?

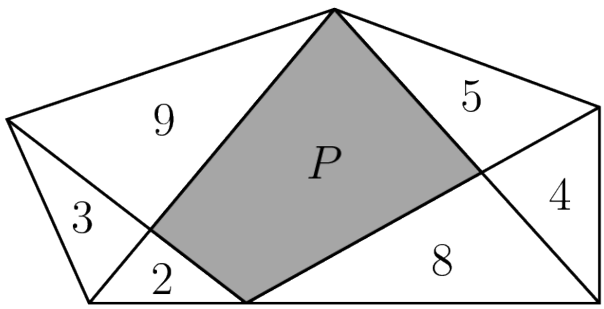
A) 1 **B)** 2 **C)** 4 **D)** 8 **E)** 9

Ratkaisu. Koska

$$7! \cdot 6! = 7! \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 7! \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 7! \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 10!,$$

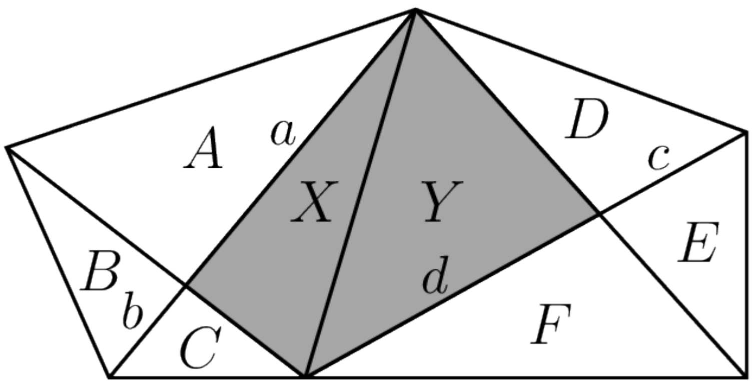
on oltava $n = 10$, joten kysytty numeroiden summa on $1 + 0 = 1$.

14. Viisikulmio pilkotaan pienempiin osiin kuten kuvassa. Luvut kolmioiden sisällä kertovat niiden alat. Mikä on varjostetun nelikulmion ala P?



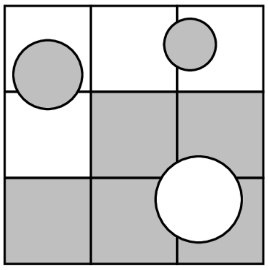
A) 15 **B)** $\frac{31}{2}$ **C)** 16 **D)** 17 **E)** 18

Ratkaisu. Merkitkäämme tunnettuja aloja A, B, C, D, E ja F, ja pilkkokaamme ala P aloiksi X ja Y, kuten kuvassa:



Koska alat A ja B vastaavat kolmioita, joilla on sama kanta, on vastaaville sivuille a ja b oltava $A/B = a/b$. Aivan samoin on oltava $X/C = a/b$, joten $X/C = A/B$, eli $X = AC/B = 9 \cdot 2/3 = 6$. Aivan samoin kuvioon merkittyjen pituuksien c ja d avulla on oltava $Y/D = d/c = F/E$, joten $Y = DF/E = 5 \cdot 8/4 = 10$. Täten on oltava $P = X + Y = 16$.

15. Neliön sivun pituus on 30 cm ja se on pilkottu yhdeksäksi yhteneväksi pienemmäksi neliöksi ja sen sisälle on piirretty kolme ympyrää. Varjostettujen ympyröiden säteet ovat 3 cm ja 4 cm, ja kolmannen ympyrän säde on 5 cm. Mikä on varjostettujen alueiden ala yhteensä?

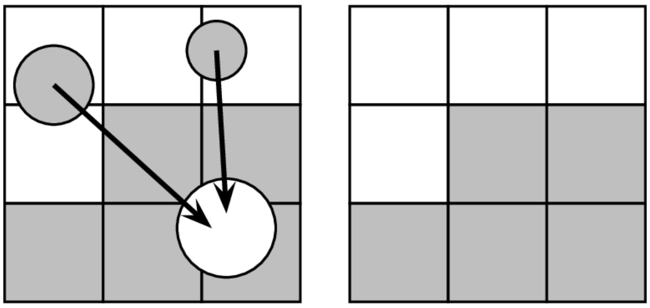


A) $400\,\text{cm}^2$ **B)** $500\,\text{cm}^2$ **C)** $(400+50\pi)\,\text{cm}^2$ **D)** $(500-25\pi)\,\text{cm}^2$ **E)** $(500+25\pi)\,\text{cm}^2$

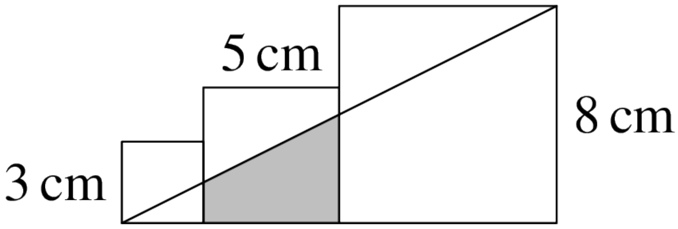
Ratkaisu. Pienen neliön sivun pituus on 10 cm, joten sellaisen ala on $100\,\text{cm}^2$. Varjostettujen ympyröiden yhteinen ala on

$$\left(\pi 3^2+\pi 4^2\right)\text{cm}^2 = 25\pi\,\text{cm}^2 = \pi 5^2\,\text{cm}^2,$$

eli yhtä suuri kuin varjostamattoman ympyrän ala. Siten varjostettu ala vastaa viittä varjostettua pientä neliötä, eli se on $5\cdot 100\,\text{cm}^2 = 500\,\text{cm}^2$.



16. Kuvassa on kolme neliötä, joiden sivujen pituudet ovat 3 cm, 5 cm ja 8 cm. Mikä on varjostetun puolisuunnikkaan ala?



A) $13\,\text{cm}^2$ **B)** $\frac{55}{4}\,\text{cm}^2$ **C)** $\frac{61}{4}\,\text{cm}^2$ **D)** $\frac{65}{4}\,\text{cm}^2$ **E)** $\frac{69}{4}\,\text{cm}^2$

Ratkaisu. Olkoon puolisuunnikkaan vasemman sivun korkeus p ja oikean sivun korkeus q. Yhdenmuotoisilla kolmioilla näemme, että

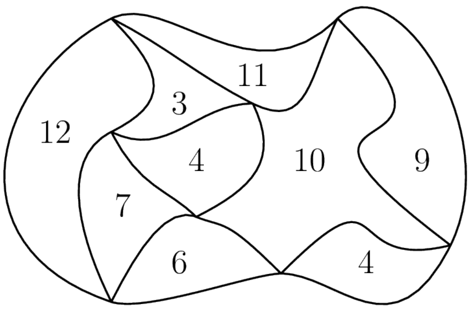
$$\frac{p}{3\,\text{cm}} = \frac{q}{3\,\text{cm}+5\,\text{cm}} = \frac{8\,\text{cm}}{3\,\text{cm}+5\,\text{cm}+8\,\text{cm}},$$

mistä voimme ratkaista $p = \frac{3}{2}\,\text{cm}$ ja $q = 4\,\text{cm}$. Siten puolisuunnikkaan ala on

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\,\text{cm}+4\,\text{cm}\right)\cdot 5\,\text{cm} = \frac{55}{4}\,\text{cm}^2.$$

5 pistettä

17. Kuvassa on erään puiston kartta. Puisto on pilkottu alueiksi. Jokaisen alueen sisälle on kirjoitettu luku, joka kertoo sen ympärysmitan kilometreissä. Mikä on koko puiston ympärysmitta?



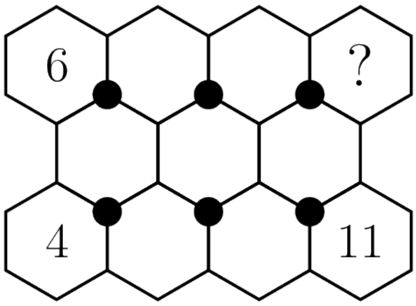
A) 22 km **B)** 26 km **C)** 28 km **D)** 32 km **E)** 36 km

Ratkaisu. Kysytty ympärysmitta on luonnollisesti

$$12\,\text{km}+11\,\text{km}+9\,\text{km}+4\,\text{km}+6\,\text{km}-7\,\text{km}-3\,\text{km}-10\,\text{km}+4\,\text{km} = 26\,\text{km}.$$

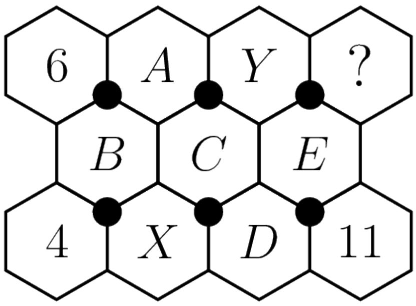
Asian ydin on se, että tässä 12 km, 11 km, 9 km, oikeanpuoleisen 4 km, ja 6 km alueiden ympärysmitat sisältävät koko puiston ympärysmitan jokaisen osan täsmälleen kerran, ja vähentämällä näiden summasta 7 km, 3 km, ja 10 km alueiden ympärysmitat, edellisten ympärysmitoista poistetaan ne osat, jotka eivät ole osa koko puiston ympärysmittaa, mutta samalla summasta poistetaan keskellä olevan 4 km ympärysmittaisen alueen piiri, jonka lisäämällä saamme siis oikean lopputuloksen.

18. Luvut 1, 2, 3, ..., 11 on kirjoitettava kuusikulmioihin niin, että jokaisen mustan täplän ympärillä olevien kolmen kuusikulmion lukujen summa on sama kaikille kuudelle täplälle. Kolme luvuista on jo kirjoitettu ruudukkoon. Mikä luku on kirjoitettava kysymysmerkillä varustettuun kuusikulmioon?

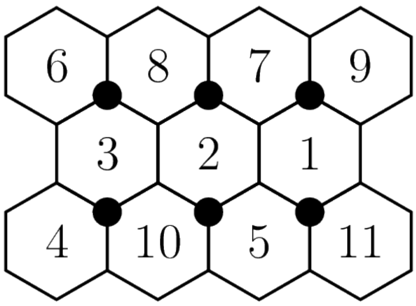


A) 1 **B)** 3 **C)** 5 **D)** 7 **E)** 9

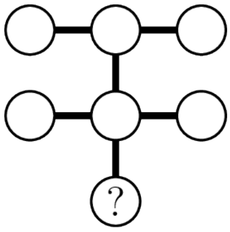
Ratkaisu. Nimetkäämme tuntemattomat luvut A, B, C, D, E, X ja Y tähän tapaan:



Kahdesta vasemmanpuoleisesta täplästä tiedämme, että $6+A+B=4+B+X$, joten $X=A+2$. Samoin kahdesta keskellä olevasta täplästä seuraa, että $Y=D+2$, ja oikeanpuoleisista täplistä seuraa, että $11=?+2$, joten $?=9$.
Taulukon voi kuin voikin täyttää kokonaan tehtävänannon kuvaamalla tavalla:



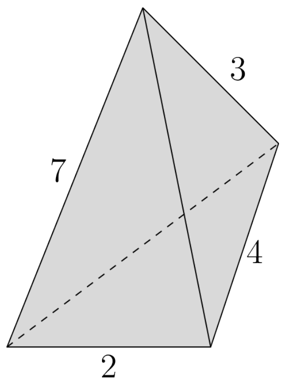
19. Seitsemän eri yksinumeroista positiivista kokonaislukua kirjoitetaan kuvion ympyröihin niin, että jokaiseen ympyrään tulee yksi luku. Ylimmän rivin kolmen luvun tulo, toisen rivin kolmen luvun tulo, ja keskimmäisen sarakkeen kolmen luvun tulo ovat kaikki keskenään yhtä suuria. Mikä luku kirjoitetaan kysymysmerkillä merkittyyn ympyrään?



A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 6 **E)** 8

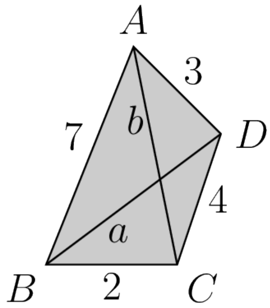
Ratkaisu. Jos luku 5 esiintyisi jossakin ympyrässä, niin täsmälleen yksi tai kaksi tuloista olisi viidellä jaollisia, ja samoin, jos luku 7 esiintyisi, niin täsmälleen yksi tai kaksi tuloista olisi seitsemällä jaollisia. Siten ympyröihin on kirjoitettava luvut 1, 2, 3, 4, 6, 8 ja 9.
Kahden ylimmän rivin lukujen tulojen tulo on tietenkin neliöluku. Koska kaikkien seitsemän käytettävissä olevan luvun tulo on $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9 = 2^7 \cdot 3^4$, sopii kysymysmerkillä varustettuun ympyrään vain 2 tai 8. Mutta luku 8 ei käy, sillä silloin kummallakin ylimmistä riveistä rivin lukujen tulo olisi $\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 9} = 36$, mikä on kahdeksalla jaoton, vaikka keskimmäisen sarakkeen lukujen tulo olisi kahdeksalla jaollinen. Siten kysymysmerkillä varustettuun ympyrään on kirjoitettava luku 2.
Todettakoon vielä lopuksi, että ympyrät voi todellakin täyttää toivotulla tavalla vaikkapa asettamalla ensimmäiselle riville luvut 1, 9 ja 8, toiselle riville luvut 3, 4, 6, ja keskimmäiseen sarakkeeseen siis luvut 9, 4 ja 2. Erityisesti on $1 \cdot 9 \cdot 8 = 3 \cdot 4 \cdot 6 = 9 \cdot 4 \cdot 2 = 72$.

20. Tetraedrin jokaisen särmän pituus on positiivinen kokonaisluku. Neljä näistä pituuksista on merkitty kuvaan. Mikä on kahden muun särmän pituuksien summa?



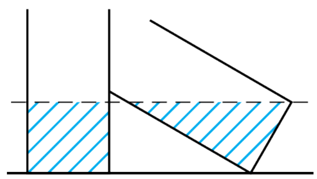
A) 9 **B)** 10 **C)** 11 **D)** 12 **E)** 13

Ratkaisu. Merkitkäämme tetraedrin kärkiä A, B, C ja D sekä tuntemattomia särmiä a ja b tähän tapaan:



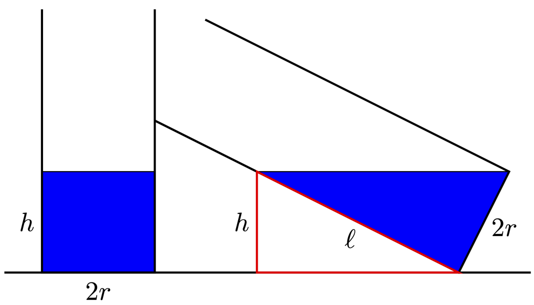
Jokaisessa kolmiossa jokainen sivu on lyhyempi kuin kahden muun summa. Kolmiosta $\triangle ABD$ näemme, että $7 < a+3$, joten $a > 4$. Kolmiosta $\triangle BCD$ näemme, että $a < 2+4 = 6$. Koska a on nyt kokonaisluku, jolle $4 < a < 6$, voi olla vain $a = 5$. Aivan samoin näemme kolmiosta $\triangle ACD$, että $b < 3+4 = 7$, ja kolmiosta $\triangle ABC$, että $7 < b+2$, eli $b > 5$. Koska b on kokonaisluku, jolle $5 < b < 7$, voi olla vain $b = 6$. Siispä kysytty summa on $a+b = 5+6 = 11$.

21. Kaksi samanlaista suoran ympyrälieriön muotoista vesisäiliötä sisältävät kumpikin saman määrän vettä. Vasemmanpuoleinen säiliöistä on pystyssä, ja oikeanpuoleinen nojaa vasemmanpuoleiseen, ja veden korkeus on kummassakin säiliössä sama. Kummankin säiliön pohja on ympyrä, jonka ala on $3\pi\,\mathrm{m}^2$. Kuinka paljon vettä yhdessä säiliössä on?



A) $3\sqrt{3}\pi\,\mathrm{m}^3$ **B)** $6\pi\,\mathrm{m}^3$ **C)** $9\pi\,\mathrm{m}^3$ **D)** $\frac{3\pi}{4}\,\mathrm{m}^3$ **E)** $\frac{7\pi}{4}\,\mathrm{m}^3$

Ratkaisu. Olkoon veden korkeus h ja pohjan säde $r = \sqrt{3}\,\mathrm{m}$.



Vasemmanpuoleisessa säiliössä veden korkeus on h, ja oikeanpuoleisessa vesi yltää veden korkeutta vastaavalle etäisyydelle ℓ pohjasta, kuten kuvassa. Luonnollisesti oikeanpuoleisessa säiliössä on puolet siitä vesimäärästä, mikä vasemmanpuoleisessa säiliössä olisi, jos siinä veden korkeus olisi ℓ. Täten $\ell = 2h$.
Nyt oikeanpuoleisessa kuvaan merkityssä suorakulmaisessa kolmiossa esiintyy toisena kateettina h ja hypotenuusana $\ell = 2h$, joten kyseessä on muistikolmio, jonka terävät kulmat ovat 30° ja 60°. Suorakulmaisesta kolmiosta, jonka kateetteina ovat $\ell = 2h$ ja $2r$ näemme, että $2h = \sqrt{3}\cdot 2r$ joten $h = \sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\,\mathrm{m} = 3\,\mathrm{m}$. Siispä yhden säiliön veden tilavuus on $3\,\mathrm{m}\cdot 3\pi\,\mathrm{m}^2 = 9\pi\,m^3$.

22. Kuuden peräkkäisen positiivisen kokonaisluvun tulo on 12-numeroinen luku, joka on muotoa

$$abb\,cdd\,cdd\,abb,$$

missä numerot a, b, c ja d ovat itsessään neljä peräkkäistä lukua jossakin järjestyksessä. Mikä numero onkaan d?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

Ratkaisu. Kuudesta peräkkäisestä kokonaisluvusta ainakin yksi on jaollinen viidellä ja kolme parillisia. Erityisesti niiden tulo on jaollinen kymmenellä, joten $b = 0$. Numerot a, c ja d ovat, jossakin järjestyksessä, numerot 1, 2 ja 3. Koska tulo on jaollinen tulolla $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$, se on parillinen sen jälkeen, kun se on jaettu luvulla $4 \cdot 25 = 100$. Täten $a = 2$, ja numerot c ja d ovat, jossakin järjestyksessä, 1 ja 3. Koska kuudesta peräkkäisestä kokonaisluvusta kaksi on jaollisia kolmella, on tulon oltava jaollinen yhdeksällä, jolloin tulon numeroiden summan

$$\begin{aligned}
&a+b+b+c+d+d+c+d+d+a+b+b\\
&=2\cdot a+4\cdot b+2\cdot c+4\cdot d\\
&=2\cdot 2+4\cdot 0+2\cdot c+4\cdot d\\
&=4+2\cdot c+4\cdot d
\end{aligned}$$

on myös oltava jaollinen yhdeksällä. Jos olisi $c = 3$ ja $d = 1$, summa olisi $4 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 1 = 14$, joka ei ole yhdeksällä jaollinen. Täten voi olla vain $c = 1$ ja $d = 3$. Kysytty numero d on siis 3, ja itse asiassa kyseinen 12-numeroinen luku on 200 133 133 200, joka itse asiassa on tulo $74 \cdot 75 \cdot 76 \cdot 77 \cdot 78 \cdot 79$.

23. Luomme kuvan mukaisen peräkkäisten kokonaislukujen lukuspiraalin aloittamalla luvusta 1. Kun spiraalikuviota jatketaan pidemmälle, missä muodossa luvut 625, 626 ja 627 tulevat vastaan?

$$\begin{array}{ccccccccc}
\vdots & & 10 & \to & 11 & \to & 12 & \to & 13\\
\uparrow & & \uparrow & & & & & & \downarrow\\
24 & & 9 & & 2 & \to & 3 & & 14\\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \downarrow & & \downarrow\\
23 & & 8 & & 1 & & 4 & & 15\\
\uparrow & & \uparrow & & & & \downarrow & & \downarrow\\
22 & & 7 & \leftarrow & 6 & \leftarrow & 5 & & 16\\
\uparrow & & & & & & & & \downarrow\\
21 & \leftarrow & 20 & \leftarrow & 19 & \leftarrow & 18 & \leftarrow & 17
\end{array}$$

A) $\begin{array}{c} 627\\ \uparrow\\ 626\\ \uparrow\\ 625 \end{array}$ **B)** $\begin{array}{ccc} 626 & \to & 627\\ \uparrow & & \\ 625 & & \end{array}$ **C)** $625 \to 626 \to 627$

D) $\begin{array}{ccc} 625 & \to & 626\\ & & \downarrow\\ & & 627 \end{array}$ **E)** $\begin{array}{c} 625\\ \downarrow\\ 626\\ \downarrow\\ 627 \end{array}$

Ratkaisu. Kun aloitamme keskeltä luvusta 1, lisäämme luvun 1 ja sitten uudelleen luvun 1 päästäksemme ensimmäiseen oikeaan ylänurkkaan, ja sitten luvun 2 ja toisen luvun 2 päästäksemme vasempaan alanurkkaan. Siis jokaisella positiivisella kokonaisluvulla n on n. vastaan tulevassa spiraalin vasemmassa alanurkassa luku

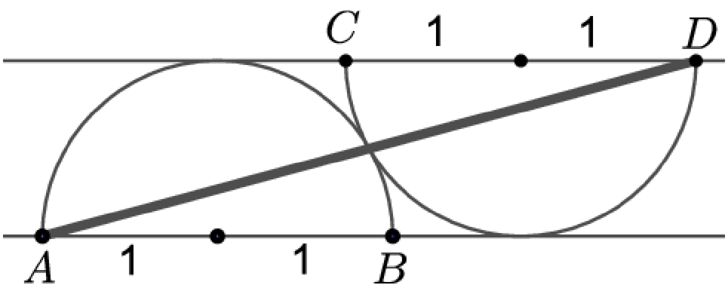
$$1+2(1+2+\ldots+2n) = 1+2\cdot\frac{2n(2n+1)}{2} = 1+2n(2n+1).$$

Tämän vasemman alanurkan jälkeen seuraavassa vasemmassa ylänurkassa esiintyy luku

$$1+2n(2n+1)+(2n+1) = 1+(2n+1)^2.$$

Koska $626 = 1+25^2 = 1+(2\cdot 12+1)^2$, esiintyy 626 vasemmassa ylänurkassa, eli b) on oikea vaihtoehto.

24. Oheisessa diagrammissa on kaksi toisiaan sivuavaa puoliympyrää, joista kummankin säde on 1, ja joiden halkaisijat AB ja CD ovat yhdensuuntaisia, ja kummankin halkaisijan jatke sivuaa toista puoliympyrää. Mikä onkaan etäisyyden AD neliö?



A) 16 **B)** $8+4\sqrt{3}$ **C)** 12 **D)** 9 **E)** $5+2\sqrt{3}$

Ratkaisu. Soveltamalla Pythagoraan lausetta kahdesti näemme, että kysytty neliö on

$$(2+\sqrt{3})^2+1^2 = 4+4\sqrt{3}+3+1 = 8+4\sqrt{3}.$$