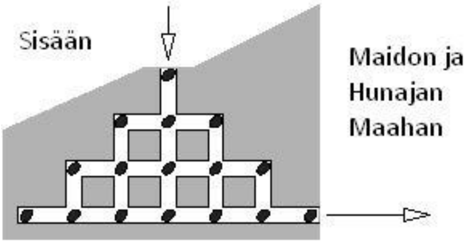
3 pistettä

1.
Laskimeni jakaa kertomisen sijasta ja vähentää yhteen laskemisen sijasta. Näppäilen (12x3)+(4x2). Minkä tuloksen laskin antaa?

(A) 2 (B) 6 (C) 12 (D) 28 (E) 38

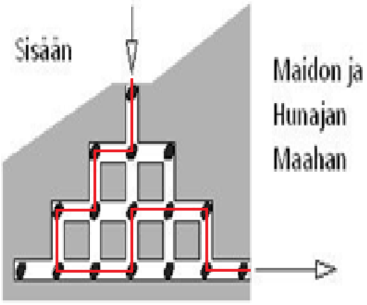
Ratkaisu: (12:3) – (4:2) = 2

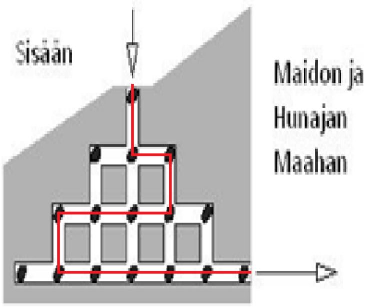
2.
Hamsteri Fridolin suuntaa kulkunsa kohti legendaarista Maidon ja Hunajan Maata. Matka sinne kulkee sokkelon kautta. Sokkelossa on 16 kurpitsansiementä kuvaan merkityissä paikoissa.



Fridolin ei saa käydä missään kohdassa sokkeloa kahdesti. Kuinka monta kurpitsan siementä Fridolin enintään onnistuu keräämään?
(A) 12 **(B) 13** (C) 14 (D) 15 (E) 16

Ratkaisu: Vähintään kolme siementä jää keräämättä: ylimmältä riviltä jommassakummassa reunassa oleva, alarivin reunimmainen vasemmalta ja lisäksi yksi reitistä riippuva siemen. Kuvissa on kaksi reittivaihtoehtoa.





3.
Suojatie on tehty 50 cm leveistä valkoisista ja mustista raidoista. Joka toinen raita on musta, ja sekä ensimmäinen että viimeinen raita ovat valkoisia. Valkoisia raitoja on yhteensä kahdeksan. Kuinka pitkä suojatie on?
(A) 7 m **(B)** 7.5 m (C) 8 m (D) 8.5 m (E) 9 m

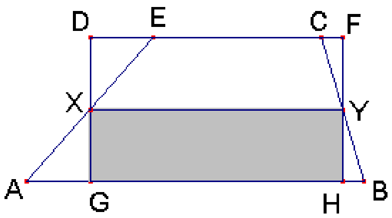
Ratkaisu: Valkoisia raitoja on kahdeksan ja mustia 7, yhteensä 15 raitaa. $15 \cdot 0{,}5m = 7{,}5m$.

4.
Tummennetun suorakulmion ala on 13 cm^2. *X* ja *Y* ovat puolisuunnikkaan sivujen keskipisteitä.

Mikä on puolisuunnikkaan ala?

(A) 24 cm^2 (B) 25 cm^2 **(C)** 26 cm^2 (D) 27 cm^2 (E) 28 cm^2

Ratkaisu:



Kolmiot AGX ja EDX ovat yhtenevät, samoin kolmiot YHB ja YFC. Puolisuunnikkaan ABCE pinta-ala on yhtä suuri kuin suorakulmion GHFD pinta-ala, joka on kaksi kertaa varjostetun suorakulmion GHYX pinta-ala, siis $2 \cdot 13$ $cm^2 = 26$ cm^2.

5.
Jos $P = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5$, $Q = 2^2 + 3^2 + 4^2$ ja $R = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4$, niin mikä seuraavista väitteistä on tosi?

(A) $Q < P < R$ (B) $P < Q = R$ (C) $P < Q < R$ **(D)** $R < Q < P$ (E) $Q = P < R$

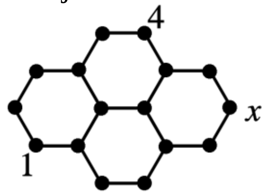
Ratkaisu:

Tapa 1:
$R = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = R_1 + R_2 + R_3$
$Q = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 = Q_1 + Q_2 + Q_3$
$P = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 = P_1 + P_2 + P_3$

Huomataan, että $R_1 < Q_1 < P_1$, $R_2 < Q_2 < P_2$ ja $R_3 < Q_3 < P_3$, joten $R < Q < P$.

Tapa 2: $P = 38$, $Q = 29$ ja $R = 20$, joten vain väite D on tosi.

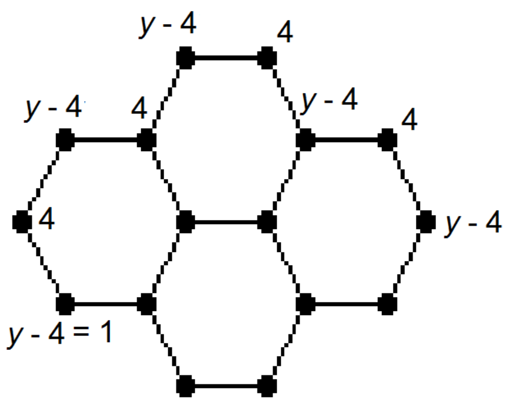
6.
Kuvioon kirjoitetaan luku jokaisen pisteen paikalle siten, että jokaisen janan päätepisteissä olevien lukujen summa on sama.



Kaksi lukua on kirjoitettu valmiiksi. Mikä luku tulee x:n paikalle?

(A) 1 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) tarvitaan lisätietoja

Ratkaisu: Olkoon y janan päätepisteissä olevien lukujen summa. Kuvan mukaisesti saadaan $x = 1$.



7.
Kun 2011 jaettiin eräällä luvulla, jakojäännös oli 1011. Mikä luvuista 100, 500 tai 1000 oli jakaja?

(A) 100 (B) 500 (C) 1000
(D) joku muu luku **(E)** ei ole mahdollista saada jakojäännöstä 1011

Ratkaisu: Jakoyhtälö: jaettava = jakaja · osamäärä + jakojäännös, missä jakojäännös on pienempi kuin jakaja. Koska 1011 > 100 ja 1011 > 500 ja 1011 > 1000, A, B ja C ovat vääriä vaihtoehtoja.

2011 = jakaja · osamäärä + 1011, eli jakaja · osamäärä = 1000 > 0. Osamäärä ei siis ole 0. Osamäärä on kokonaisluku, joten sen pitäisi olla vähintään 1. Tällöin jakaja on 1000 tai sitä pienempi luku, mikä edellä perusteltiin mahdottomaksi. Ei siis ole sellaista lukua, että sillä jaettaessa jakojäännökseksi tulisi 1011.

8.
Neliön muotoisista laatoista tehdään suorakulmio, jonka pinta-ala on 360 cm^2. Kaikki laatat ovat saman kokoisia. Suorakulmion korkeus on 24 cm ja leveys 5 laattaa. Mikä on yhden laatan pinta-ala?

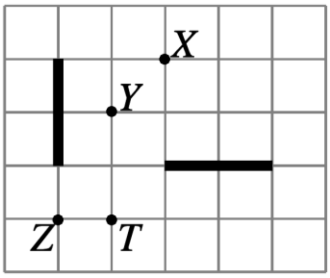
(A) 1 cm^2 (B) 4 cm^2 **(C)** 9 cm^2 (D) 16 cm^2 (E) 25 cm^2

Ratkaisu: Olkoon laatan leveys x cm. Suorakulmion pinta-ala on $360 = 5x \cdot 24$, josta $x = 3$.
Neliön muotoisen laatan pinta-ala on siis $3 \cdot 3 = 9$ (cm^2).

9.
Kaikki nelinumeroiset luvut, joiden numeroiden summa on 4, luetellaan suurimmasta pienimpään. Kuinka mones luku listassa on 2011?
(A) 6. (B) 7. (C) 8. **(D)** 9. (E) 10.

Ratkaisu: Lista alkaa luvuilla 4000, 3100, 3010, 3001, 2200, 2110, 2101, 2020 ja 2011. 2011 on siis yhdeksäs luku.

10.
Kuvassa olevat janat on saatu toisistaan kiertämällä niitä tietyn pisteen ympäri. Tuota pistettä kutsutaan kiertokeskukseksi.

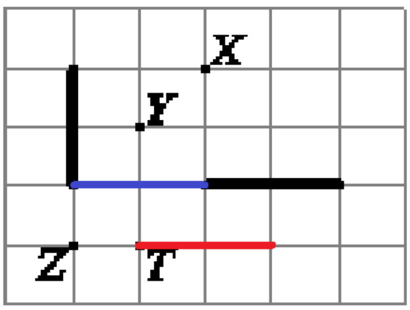


Mitkä merkityistä pisteistä voivat olla kiertokeskuksia?
(A) Vain X (B) X ja Z **(C)** X ja T (D) Vain T (E) X, Y, Z ja T

Ratkaisu: Kun pystysuoraa janaa kierretään pisteen X ympäri vastapäivään 90°, saadaan kuvan vaakasuora jana. Kun pystysuoraa janaa kierretään pisteen T ympäri myötäpäivään 90°, saadaan kuvan vaakasuora jana. Siis ainakin X ja T voivat olla kiertokeskuksia.

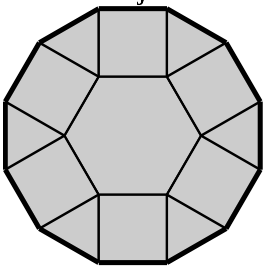
Jos pystysuoraa janaa kierretään pisteen Z ympäri 90° myötäpäivään, saadaan kuvaan piirretty jana, jonka toinen päätepiste on T. Tämän janan asento on oikea mutta paikka väärä, joten piste Z ei voi olla kiertokeskus.

Jos pystysuoraa janaa kierretään pisteen Y ympäri 90° vastapäivään, saadaan kuvaan piirretty jana, joka yhdistää alkuperäisten janojen toiset päätepisteet. Tämän janan asento on oikea mutta paikka väärä, joten Y ei voi olla kiertokeskus.



4 pistettä

11.
Oheinen kuvio koostuu säännöllisestä kuusikulmiosta, jonka sivun pituus on yksi, sekä kuudesta kolmiosta ja kuudesta neliöstä.



Mikä on kuvion piiri?

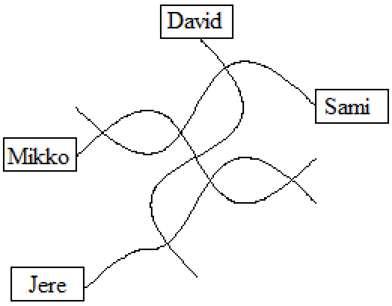
(A) $6(1+\sqrt{2})$ (B) $6\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **(C)** 12 (D) $6+3\sqrt{2}$ (E) 9

Ratkaisu: Koska kuusikulmion sivun pituus on 1, on myös neliön sivun pituus 1, joten kolmiot ovat tasakylkisiä ja kylkien pituus on 1. Kuusikulmion kulmien summa on (6 – 2) · 180° = 720° ja yksi kulma 720° : 6 = 120°. Siten kolmion huippukulma on 360° – 2 · 90° – 120° = 60°, joten kolmio on tasasivuinen ja sen sivun pituus on 1. Koska sekä kolmion että neliön sivun pituus on 1, on piiri 12 · 1 = 12.

12.
Tavallisessa arpakuutiossa vastakkaisten tahkojen pisteiden summa on 7. Kolme tavallista arpakuutiota liimataan päällekkäin pinoksi siten, että toisiinsa liimattujen tahkojen pisteiden summa on molemmissa kiinni liimatuissa väleissä 5. Yhdessä alimman arpakuution näkyvissä olevassa tahkossa on vain yksi piste. Kuinka monta pistettä on ylimmän arpakuution ylimmässä tahkossa?
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 **(E)** 6

Ratkaisu: Koska toisiinsa liimattujen tahkojen pisteiden summa on 5, on alimman arpakuution liimatussa tahkossa korkeintaan 4 pistettä. Koska yhden pisteen tahko on alimmassa arpakuutiossa näkyvissä, on alimman kuution ylimmässä tahkossa 2, 3 tai 4 pistettä. Näitä vastaavat pisteiden määrät keskimmäisen kuution alimmassa tahkossa (vastakkain liimattujen pistesumma 5) ovat 3, 2 ja 1 pistettä ja keskimmäisen kuution ylimmässä tahkossa (vastakkaisten pistesumma 7) 4, 5 tai 6 pistettä. Näistä vain ensimmäinen on mahdollinen, koska toisiinsa liimattujen tahkojen pisteiden summa on 5. Siten ylimmän arpakuution alimmassa tahkossa on 1 ja ylimmässä tahkossa 6 pistettä.

13.
Ollessaan laivamatkalla Joni yritti piirtää kartan kotikylästään, mutta merenkäynti oli kovaa ja laiva keinui.



Hän onnistui piirtämään neljä katua, niiden seitsemän risteystä ja ystäviensä talot. Oikeasti Nuolikatu, Naulakatu ja Viivainkatu ovat aivan suoria. Neljäs katu on Mutkatie. Kuka asuu Mutkatiellä?

(A) David (B) Jere <u>(C)</u> Mikko (D) Sami (E) ei voi tietää tämän kartan perusteella

Ratkaisu: Mikon kotikatu on ainoa tie, joka risteää kahdesti kahden eri tien (kahdesti Samin ja kahdesti Jeren kotikadun) kanssa. Siten joko Mikon kotikatu ei ole suora tai kumpikaan Jeren ja Samin kotikaduista ei ole suora. Koska kaikki paitsi yksi katu ovat suoria, Mikko asuu Mutkatiellä.

14.
Kolme kuljettajaa osallistui kilpa-ajoon: Michael, Fernando ja Sebastian. Heti lähdön jälkeen Michael oli johdossa, Fernando toisena ja Sebastian kolmantena. Kilpailun aikana Michaelin ja Fernandon keskinäinen paremmuusjärjestys vaihtui 9 kertaa, Fernandon ja Sebastianin 10 kertaa sekä Michaelin ja Sebastianin 11 kertaa. Missä järjestyksessä kuljettajat tulivat maaliin?

(A) Michael, Fernando, Sebastian <u>(B)</u> Fernando, Sebastian, Michael (C) Sebastian, Michael, Fernando (D) Sebastian, Fernando, Michael (E) Fernando, Michael, Sebastian

Ratkaisu: Michaelin ja Fernandon paremmuusjärjestys vaihtui parittoman määrän kertoja, joten (toisin kuin alussa) <u>Fernando on lopussa Michaelin edellä</u>. Fernandon ja Sebastianin paremmuusjärjestys vaihtui parillisen määrän kertoja, joten <u>Fernando on</u> myös <u>lopussa Sebastianin edellä</u>. Michaelin ja Sebastianin paremmuusjärjestys vaihtui parittoman määrän kertoja, joten (toisin kuin alussa) <u>Sebastian on Michaelin edellä</u>. Siis vaihtoehto B on oikea.

15.
Mikä on eksponentin *n* arvo yhtälössä $9^n + 9^n + 9^n = 3^{2011}$?

<u>(A)</u> 1005 (B) 1006 (C) 2010 (D) 2011 (E) ei mikään edellisistä

Ratkaisu:

$$3 \cdot 9^n = 3^{2011}$$
$$3 \cdot (3^2)^n = 3^{2011}$$
$$3^{2n+1} = 3^{2011}$$
$$2n + 1 = 2011$$
$$n = 1005$$

16.
Eräässä kuussa oli viisi maanantaita, viisi tiistaita ja viisi keskiviikkoa. Edellisessä kuussa oli vain neljä sunnuntaita. Mitä seuraavassa kuussa on varmasti?

(A) täsmälleen 4 perjantaita (**B)** täsmälleen 4 lauantaita (C) viisi sunnuntaita (D) 5 keskiviikkoa (E) tilanne on mahdoton

Ratkaisu: Tässä kuussa on 5 maanantaita, tiistaita ja keskiviikkoa. Muita viikonpäiviä on oltava 4 kutakin, koska muuten olisi yli 31 päivää kuukaudessa.

ma	ti	ke	to	pe	la	su
x	x	x	x	x	x	x
x	x	x	x	x	x	x
x	x	x	x	x	x	x
x	x	x	x	x	x	x
x	x	x				

Koska viime kuussa oli vain neljä sunnuntaita ja sunnuntai oli kuun viimeinen päivä, niin viime kuu on näyttänyt seuraavalta:

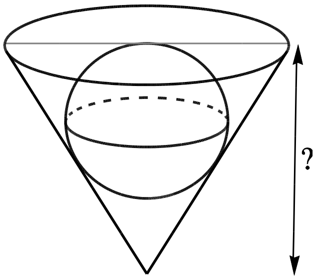
ma	ti	ke	to	pe	la	su
x	x	x	x	x	x	x
x	x	x	x	x	x	x
x	x	x	x	x	x	x
x	x	x	x	x	x	x

Viime kuussa oli siis 28 päivää, joten se oli helmikuu, nyt on maaliskuu ja ensi kuu huhtikuu, jossa on 30 päivää. Ensi kuun 1. päivä on torstai.

ma	ti	ke	to	pe	la	su
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30		

Kuvan perusteella väite b) on ainoa joka on totta.

17.
Pallo, jonka säde on 15, mahtuu juuri ja juuri kartionmuotoiseen kuoppaan (kuva).

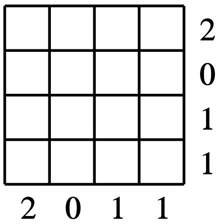


Suoraan sivusta katsottuna kuoppa näyttää tasasivuiselta kolmiolta. Kuinka syvä kuoppa on?

(A) $30\sqrt{2}$ (B) $25\sqrt{3}$ **(C)** 45 (D) 60 (E) $60(\sqrt{3}-1)$

Ratkaisu: Sivusta katsottuna pallo on kolmion sisään piirretty ympyrä, joten sen keskipiste on kolmion kulmanpuolittajien leikkauspiste. Koska kolmio on tasasivuinen, kyseinen piste on myös kolmion mediaanien leikkauspiste. Mediaanilauseen mukaan mediaanien leikkauspiste jakaa jokaisen mediaanin suhteessa 2 : 1 kärjestä lukien, joten mediaanin pituus ja samalla kuopan syvyys saadaan kertomalla pallon säde kolmella. Kuopan syvyys on siis 45.

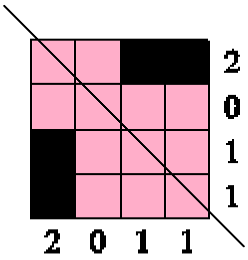
18.
Kuvan 4 x 4 –ruudukon jokainen ruutu väritetään joko mustaksi tai punaiseksi.



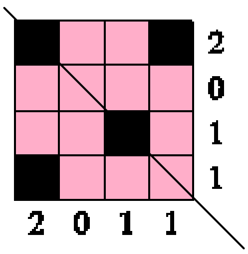
Kunkin rivin vieressä ja sarakkeen alapuolella oleva luku ilmoittaa, kuinka monta mustaa ruutua kyseisessä rivissä tai sarakkeessa on. Kuinka monella eri tavalla ruudukko voidaan värittää?

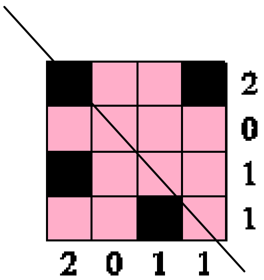
(A) 0 (B) 1 (C) 3 **(D)** 5 (E) 9

Ratkaisu: Ylimmän rivin toinen ruutu on väritettävä punaiseksi. Toinen ylimmän rivin punainen ruutu voidaan valita kolmella tavalla. Jos valitaan punaiseksi ruuduksi rivin ensimmäinen ruutu, päädytään seuraavaan väritykseen:

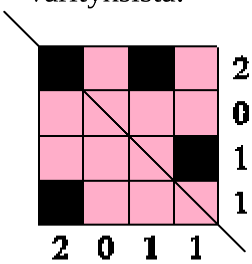


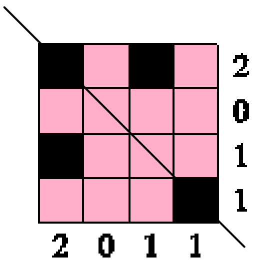
Jos valitaan ensimmäiseltä riviltä punaiseksi kolmas ruutu, päädytään jompaankumpaan seuraavista värityksistä:





Jos valitaan ensimmäiseltä riviltä punaiseksi neljäs ruutu, päädytään jompaankumpaan seuraavista värityksistä:





Erilaisia värityksiä on siis viisi, joista kolme on symmetrisiä neliön lävistäjän suhteen ja kaksi muuta ovat peilikuvia tämän saman lävistäjän suhteen.

19.
Kuinka monta lukua on pisimmässä sellaisessa peräkkäisten kolminumeroisten lukujen jonossa, jossa jokaisessa luvussa on vähintään yksi pariton numero?
(A) 1 (B) 10 (C) 110 **(D)** 111 (E) 221

Ratkaisu: Jotta jono olisi mahdollisimman pitkä, on siihen kuuluttava sata peräkkäistä lukua, joissa on kaikissa ensimmäisenä numerona sama pariton numero (esim. 300, 301, ..., 399). Näitä suurempia lukuja jonoon ei saada, koska seuraavan luvun ensimmäinen numero on parillinen ja loput nollia. Kuitenkin kyseisiä sataa lukua pienempiä lukuja voidaan vielä ottaa mukaan jonoon (kunhan näiden sadan luvun ensimmäinen numero ei ole 1), koska seuraavassa kymmenessä niitä pienemmässä toinen numero on 9 ja yhdennessätoista kolmas numero 9. (Näin saataisiin mukaan esim. luvut 289, 290, ..., 299.) Kahdennessatoista viimeiset kaksi numeroa ovat molemmat 8 ja ensimmäinenkin numero on parillinen, joten tämän pidempää annetut ehdot täyttävää jonoa ei ole. Jonossa on jäseniä 111.

20.
Jaakko haluaa kirjoittaa oheisen 3 x 3 –ruudukon joka ruutuun kokonaisluvun siten, että jokaisen ruudukkoon sisältyvän 2 x 2 –ruudukon lukujen summa on 10.

1		0
	2	
4		3

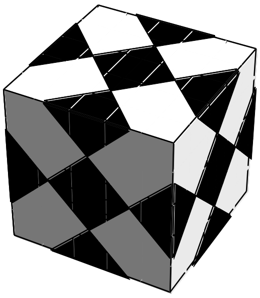
Viisi lukua on jo kirjoitettu. Mikä on puuttuvien lukujen summa?
(A) 9 (B) 10 (C) 11 **(D)** 12 (E) 13

Ratkaisu: Kuvan mukaisesti summa on $x + 7 - x + 1 + x + 4 - x = 12$.

1	7 - x	**0**
x	**2**	1 + x
4	4 - x	**3**

5 pistettä

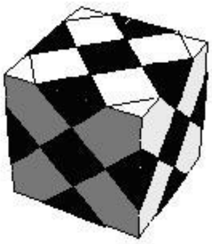
21.
Samelilla oli valkoinen muovikuutio, jonka särmän pituus oli 1 dm. Hän liimasi kuution pinnalle keskenään samanlaisia mustia neliötarroja kuvan mukaisesti siten, että kuution joka tahko näytti samalta.



Mikä oli mustan alueen kokonaispinta-ala?

(A) 37,5 cm^2 (B) 150 cm^2 **(C)** 225 cm^2 (D) 300 cm^2 (E) 375 cm^2

Ratkaisu: Yksi neliön tahko sisältää neljä valkoista neliöitä ja nurkka-alueista muodostuu viides.



Mustia neliöitä on yksi kokonainen ja neljä puolikasta eli kolme. Tahkon pinta-alasta on siis $\frac{3}{3+5}$ eli $\frac{3}{8}$ mustaa. Koko kuutiossa on kuusi tahkoa, eli mustan alueen kokonaispinta-ala on

$$6\cdot\frac{3}{8}\cdot 100cm^2 = \frac{6\cdot 3\cdot 100}{2\cdot 4}cm^2 = 9\cdot 25cm^2 = 250cm^2 - 25cm^2 = 225cm^2$$

22.
Määritellään viisinumeroinen luku ”kelvolliseksi”, jos kukin numero esiintyy siinä korkeintaan kerran, ja ensimmäinen numero on yhtä suuri kuin muiden neljän numeron summa. Kuinka monta kelvollista lukua on olemassa?
(A) 72 (B) 144 **(C)** 168 (D) 216 (E) 288

Ratkaisu: Luetellaan neljän eri numeron summia, jotka ovat korkeintaan 9 (numeroiden järjestyksestä välittämättä).
0+1+2+3=6
0+1+2+4=7
0+1+2+5=8
0+1+2+6=9
0+1+3+2=6 (tämä oli jo aikaisemmin)
0+1+3+4=8
0+1+3+5=9
0+1+4+2=7 (tämä oli jo aikaisemmin)
0+1+4+3=8 (tämä oli jo aikaisemmin)
0+1+5+2=8 (tämä oli jo aikaisemmin)
0+1+5+3=9 (tämä oli jo aikaisemmin)
0+1+6+2=9 (tämä oli jo aikaisemmin)

Tässä olivat kaikki summat, jossa on 0 ja 1. Siis lopuissa summissa pätee seuraava: jos summassa on numero 0, niin ei ole yhtään ykköstä.

0+2+3+4=9
0+2+4+3=9 (tämä oli jo aikaisemmin)

Tässä olivat kaikki summat, joissa on 0 ja 2. Lopuissa summissa pätee seuraava: jos summassa on numero 0, niin ei ole yhtään ykköstä eikä kakkosta.

0+3+4+5>9, joten ei ole enää summia joissa olisi 0.

1+2+3+4>9, joten tässä olivat kaikki summat.

Eri summia on 7, jos numeroiden järjestyksellä ei ole merkitystä. Jokaisessa niistä luku alkaa summan arvolla ja summan termit voivat olla 4! eri järjestyksessä. Kelvollisia lukuja on siten
$7 \cdot 4! = 168$.

23.
Luvut x ja y ovat molemmat suurempia kuin 1. Mikä seuraavista lausekkeista on arvoltaan suurin?

(A) $\frac{x}{y+1}$ **<u>(B)</u>** $\frac{x}{y-1}$ (C) $\frac{2x}{2y+1}$ (D) $\frac{2x}{2y-1}$ (E) $\frac{3x}{3y+1}$

Ratkaisu: kohtien c), d) ja e) lausekkeet voidaan supistaa muotoihin

(C1) $\frac{x}{y+\frac{1}{2}}$ (D1) $\frac{x}{y-\frac{1}{2}}$ (E1) $\frac{x}{y+\frac{1}{3}}$

Jaettava on kaikissa lausekkeissa sama positiivinen luku, ja jakajakin on kaikissa lausekkeissa positiivinen. Siten sen lausekkeen arvo on suurin, jossa on pienin jakaja. Vastaus on siis B.

24.
Kuinka monta järjestettyä paria (x, y) luonnollisia lukuja toteuttaa yhtälön $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{3}$?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 **<u>(D)</u>** 3 (E) 4

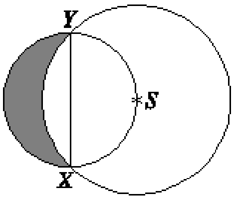
Ratkaisu: Yhtälö $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{3}$ voidaan saattaa muotoon $y=f(x)=\frac{3}{1-\frac{3}{x}}$. Alkuperäisestä yhtälöstä huomataan, että on oltava *x*, *y* > 3, muuten toinen muuttuja on negatiivinen. $\frac{3}{x}$ on aidosti vähenevä, joten $1-\frac{3}{x}$ on aidosti kasvava, joten *f* on aidosti vähenevä. Kokeilemalla muuttujan *x* arvoiksi kokonaislukuja 4…12 löydetään yhtälön toteuttavat lukuparit (4,12), (6, 6) ja (12, 4). Koska *f* on aidosti vähenevä, niin jos lukua 12 suuremmilla muuttujan *x* arvoilla löytyy lisää kokonaislukupareja, niin niissä *y* on korkeintaan 3, mikä ei kuitenkaan ole mahdollista, koska tällöin olisi *x* < 0. Siis lukupareja on tasan 3.

25.
Määritellään kokonaisluvulle $n \geq 2$ seuraavasti: $\langle n \rangle$ on suurin alkuluku (eli jaoton ykköstä suurempi luku), joka on pienempi tai yhtä suuri kuin n. Kuinka monta positiivista kokonaislukua *k* toteuttaa yhtälön $\langle k+1 \rangle + \langle k+2 \rangle = \langle 2k+3 \rangle$?

(A) 0 **<u>(B)</u>** 1 (C) 2 (D) 3 (E) Yli 3

Ratkaisu:
k = 1, <2k + 3> = <2 · 1 + 3> = < 5 > = 5, joten <2k + 3> on aina pariton luku, koska se on lukua 2 suurempi alkuluku.
Summa <k + 1> + <k + 2> on kahden alkuluvun summa. Se voi olla pariton vain, jos toinen alkuluvuista on parillinen. Ainoa parillinen alkuluku on 2.
<1 + 1> + <1 + 2> = 2 + 3 = 5 = <2 · 1 + 3>, joten yhtälö toteutuu vain kun k = 1.

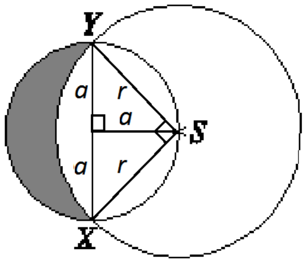
26.
Kaksi ympyrää piirretään kuvan mukaisesti.



XY on pienemmän ympyrän halkaisija, ja suuremman ympyrän keskipiste *S* on pienemmän ympyrän kehällä. Suuremman ympyrän säde on *r*. Mikä on tummennetun alueen pinta-ala?

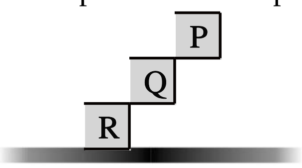
(A) $\frac{\pi}{6}r^2$ (B) $\frac{\sqrt{3}\pi}{12}r^2$ (C) $\frac{1}{2}r^2$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{4}r^2$ (E) ei mikään edellisistä

Ratkaisu: Yhdistetään piste *S* pienemmän ympyrän keskipisteeseen kuvan mukaisesti.

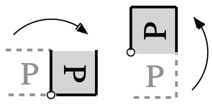


Muistikolmiosta saadaan $r = a\sqrt{2}$, josta $a = \frac{1}{\sqrt{2}}r$. Jana *YS* rajaa pienemmän ympyrän kahteen segmenttiin. Olkoon A_1 niistä pienemmän segmentin pinta-ala. Nyt $A_1 = \frac{1}{4}\pi a^2 - \frac{1}{2}a^2$. Siirtymällä muuttujaan *r* saadaan $A_1 = \frac{1}{8}\pi r^2 - \frac{1}{4}r^2$. Nyt väritetty ala on
$A_{väritetty} = \pi a^2 - 2A_1 - \frac{90}{360}\pi r^2 = \frac{\pi}{2}r^2 - \frac{\pi}{4}r^2 + \frac{1}{2}r^2 - \frac{\pi}{4}r^2 = \frac{1}{2}r^2$.

27.
Anita pelaa tietokonepeliä, jossa alkutilanne on seuraavan kuvan mukainen.

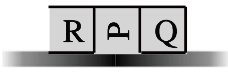


Kullakin siirrolla yhtä neliötä kierretään 90 astetta yhden kärjen ympäri kuten esimerkeissä.

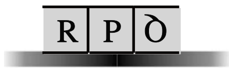


Tarkoitus on järjestää neliöt ruudun alareunaan. Mihin seuraavista tilanteista Anitan on mahdollista päästä?

(A)


<u>**(B)**</u>


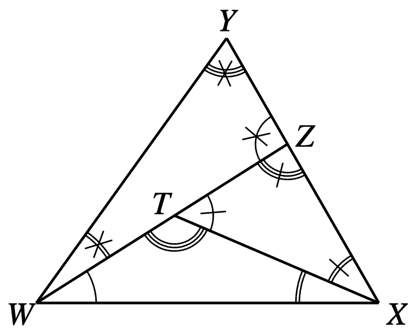
(C)


(D)


(E) kaikki A-D ovat mahdollisia

Ratkaisu: Kuvitellaan hahmottamisen helpottamiseksi ruudukko, jossa kirjaimet täyttävät kokonaisia ruutuja. Kun kirjainta liikutetaan esimerkkien mukaisesti, niin joka toisessa ruudussa kirjain on joko oikein päin tai ylösalaisin ja joka toisessa ruudussa jommin kummin päin sivuttain. Alkutilanteessa kaikki kirjaimet ovat oikein päin ja sopivasti joka toisessa ruudussa. Määritellään shakkilaudan tapaan kirjainten alkuperäiset paikat ja kaikki muutkin sellaiset ruudut mustiksi, joissa kirjain voi olla joka oikein päin tai ylösalaisin, ja loput ruudut (joissa kirjain siis voi olla vain sivuttain) valkoisiksi. Lopputilanteessa kirjaimet ovat vierekkäin, joten joka toisen ruudun on oltava musta ja joka toisen valkoinen. Vaihtoehto B on ainoa, jossa näin on.

28.
Kolmiossa *WXY* piste *Z* valitaan sivulta *XY* ja piste *T* janalta *WZ* kuvan mukaisesti. Kuvio piirretään niin, että kuvaan merkityillä yhdeksällä kulmalla on mahdollisimman vähän eri arvoja..



Mikä on pienin mahdollinen erikokoisten kulmien määrä?
(A) 2 **(B)** 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

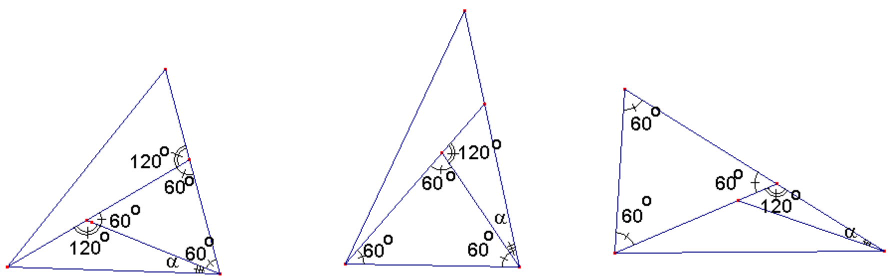
Ratkaisu: Kulmia pitää olla enemmän kuin yksi, koska jos kulmia on yksi, kaikki kuvan kolme pientä kolmiota ovat tasasivuisia. Silloin kolmiossa WXY olisi kaksi 120 asteen kulmaa. Siis kulmia on enemmän kuin 1.

Jos kulmia on vain kaksi, kaikki kolme kolmiota, joihin iso kolmio jakaantuu, ovat joko

- yhdenmuotoisia tasakylkisiä kolmioita.

tai

- ainakin yksi niistä on tasasivuinen. Tasasivuisen kolmion tapauksessa saadaan oheiset kuvat, eli eri kokoisia kulmia onkin vähintään kolme.



Kulman α asteluku ei voi missään näistä kolmioista olla 120 eikä 60.

Yhdenmuotoiset tasakylkiset kolmiot:

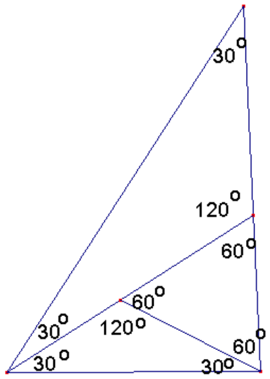
Pisteessä T on vieruskulmat. Ne eivät molemmat voi olla tasakylkisen kolmion kantakulmia, koska silloin ne olisivat 90^o. Jos ne ovat huippukulmia, pisteeseen X syntyy kaksi 45^o kulmaa.

Kulma WXZ on 90^o, jolloin joko WY ja XY ovat yhdensuuntaiset tai pisteet Y ja Z yhtyvät. Kummassakaan tapauksessa ei synny kolmiota WYZ.

Ei ole myöskään mahdollista, että toinen pisteessä T olevista kulmista olisi huippukulma ja toinen kantakulma, koska silloin summa ei voi olla 180^o. Siis kolmiot eivät kaikki ole yhdenmuotoisia, jolloin kulmia tarvitaan vähintään kolme. Kuvasta olisi voinut myös suoraan päätellä,

että $\angle WYX < \angle WZX < \angle WTX$.

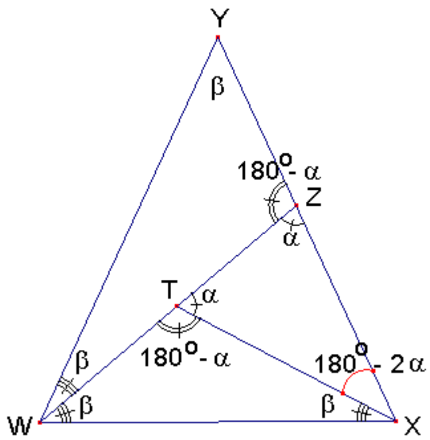
Toisaalta kolme kulmaa riittää, kuten alla oleva kuva osoittaa.



Vastaus: B, kolme erikokoista kulmaa.

Tehtävä on ratkennut, mutta voidaan vielä tutkia, onko yllä oleva kolmio ainoa, jossa kolme erikokoista kulmaa riittää:

Kaikki ison kolmion osakolmiot tasakylkisiä, mutta eivät välttämättä yhdenmuotoisia:



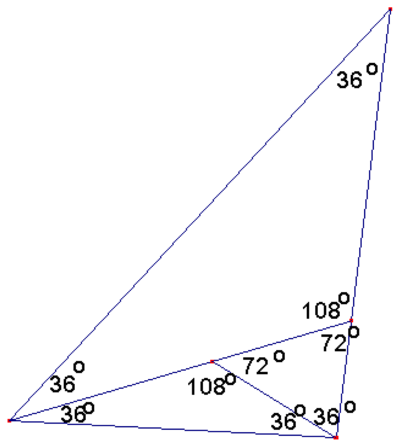
TX = ZX = TW ja WZ = ZY.
Kuvasta löytyvät kulmat α, β, $180^o - \alpha$ ja $180^o - 2\alpha$.
Kolmiosta WTX saadaan $180^o - \alpha + 2\beta = 180^o$, mistä saadaan $\alpha = 2\beta$.

Kolmioissa on siis neljä erikokoista kulmaa eli β, 2 β, $180^o - 2\beta$ ja $180^o - 4\beta$. Tutkitaan, voivatko näistä jotkin kaksi olla yhtä suuret:

$\beta = 2\beta$
$\beta = 0^o$
ei käy

$\beta = 180^o - 2\beta$
$3\beta = 180^o$
$\beta = 60^o$
$\alpha = 2\beta = 120^o$, ei käy, koska α on tasakylkisen kolmion kantakulma.

$\beta = 180^o - 4\beta$
$5\beta = 180^o$
$\beta = 36^o$
$\alpha = 2\beta = 72^o$



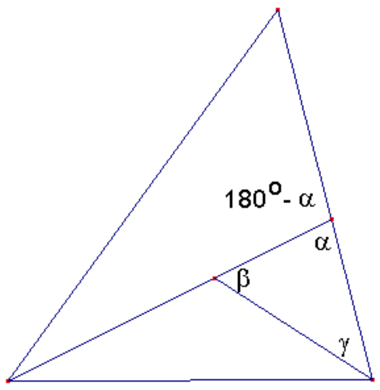
$2\beta = 180^o - 2\beta$
$4\beta = 180^o$
$\beta = 45^o$
$\alpha = 2\beta = 90^o$, ei käy, koska α on tasakylkisen kolmion kantakulma.

$2\beta = 180^o - 4\beta$
$6\beta = 180^o$
$\beta = 30^o$
$\alpha = 2\beta = 60^o$, saatiin edellä ratkaisuna oleva kolmio.

$180^o - 2\beta = 180^o - 4\beta$
$\beta = 0^o$
ei käy

Löytyi siis kaksi erilaista kolmiota, joissa on vain kolmen kokoisia kulmia.

<u>Ainakin yhdessä ison kolmion osakolmiossa on kolme erisuurta kulmaa:</u>

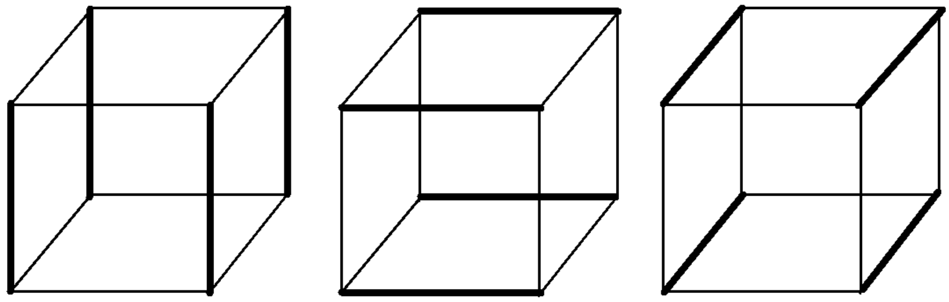


Kulma $180^o - \alpha$ ei voi olla yhtäsuuri kuin β tai γ, koska α , β ja γ ovat saman kolmion kulmia, joten niistä kahden summa on alle 180^o.
Jotta kulmia syntyisi vain kolmea kokoa, tulee olla $180^o - \alpha = \alpha$, eli $\alpha = 90^o$. Tällöin on $\beta < 90^o$ ja kulman β vieruskulma $> 90^o$, joten kulmia on taas ainakin neljää kokoa.
Samoin käy, valittiinpa eri kokoiset kulmat mihin kolmioon tahansa.
Ei siis ole muita kolmioita, joissa eri kokoisia kulmia on vain kolme.

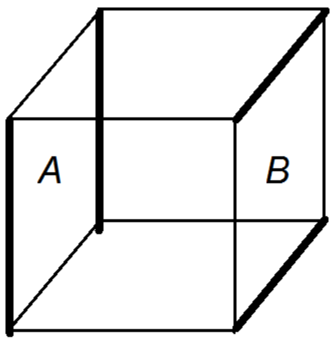
29.
Kuinka monella kuution neljän särmän joukolla on se ominaisuus, että millään kahdella särmällä ei ole yhteistä päätepistettä?

(A) 6 (B) 8 **(C)** 9 (D) 12 (E) 18

Ratkaisu: Keskenään yhdensuuntaiset särmät voidaan valita kolmella eri tavalla kuvan mukaisesti.



Jos kaikki särmät eivät ole keskenään yhdensuuntaisia, on niistä kuitenkin kaksi keskenään yhdensuuntaisia ja loput kaksi keskenään yhdensuuntaisia. Määritellään yhdensuuntaisten särmien väliin jäävät tahkot tahkoksi *A* ja tahkoksi *B*. Vastakkaiset tahkot A ja B voidaan valita kolmella eri tavalla (kun järjestyksellä ei ole väliä), ja tahkoilla olevien särmien suunta voidaan valita kahdella tavalla. Näin saadaan $3 \cdot 2 = 6$ särmäjoukkoa lisää. Yhteensä särmäjoukkoja on $3 + 6 = 9$.

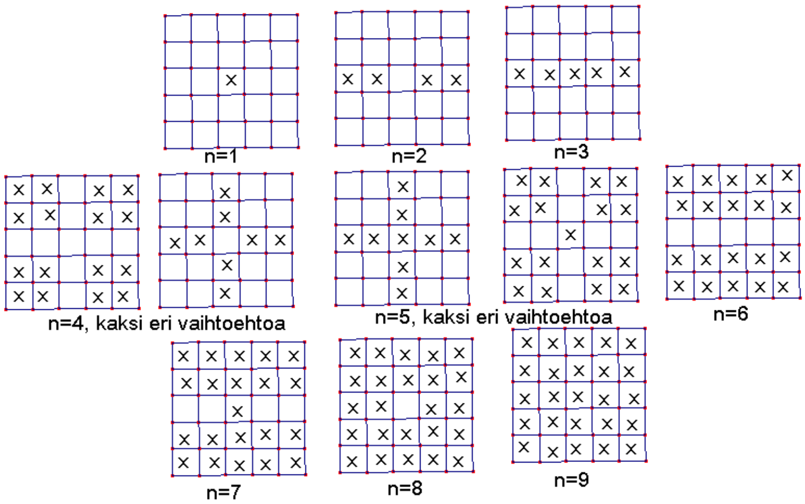


30.
Olkoon $0 < n \leq 9$. Millä muuttujan *n* arvoilla on mahdollista merkitä rasti osaan 5 x 5 –ruudukon ruutuja siten, että jokaisessa 5 x 5 –ruudukkoon sisältyvässä 3 x 3 –ruudukossa on täsmälleen *n* rastia?

(A) 9 (B) 1 ja 9 (C) 1, 2, 3 ja 9 (D) 1, 2, 8 ja 9 **(E)** kaikilla arvoilla yhdestä yhdeksään

Ratkaisu: Rasteja voi merkitä monin eri tavoin. Symmetriaa kannattaa käyttää hyväksi. Tässä kaksi tapaa merkitä 1...9 rastia ruudukkoon.

Symmetrian käyttäminen helpottaa ratkaisujen löytymistä:



Myös vähemmän symmetrisiä ratkaisuja on olemassa, esim.

n = 1

		x		

n = 3

x	x		x	x
		x		
x	x		x	x

n = 2

x				x
	x		x	
x				x

n = 4

x	x	x	x	x
		x		
x	x	x	x	x

n = 5 on sama kuin n = 4 käänteisenä (vaihdetaan rastitetut ruudut rastittamattomiksi ja toisin päin)

n = 6 on sama kuin n = 3 käänteisenä

n = 7 on sama kuin n = 2 käänteisenä

n = 8 on sama kuin n = 1 käänteisenä

n = 9 rastitetaan kaikki ruudut