Student RATKAISUT

3 pistettä

Kysymys	1	2	3	4	5	6	7
Vastaus	C	D	B	B	E	D	A

4 pistettä

Kysymys	8	9	10	11	12	13	14
Vastaus	C	C	E	B	C	A	A

5 pistettä

Kysymys	15	16	17	18	19	20	21
Vastaus	C	E	B	E	D	E	B

Kengurulogon 2024 suunnitteli Elle Joutsen.

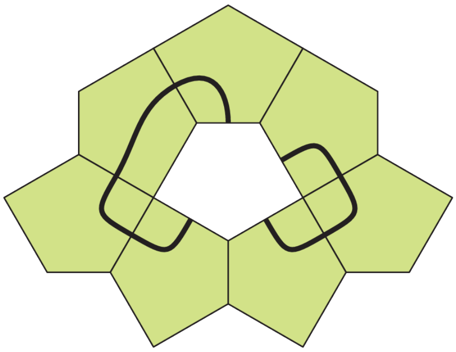
Association Kangourou sans Frontières

MAUNULAN YHTEISKOULU
Helsingin matematiikkalukio

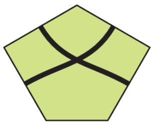
Teknologiateollisuuden 100-vuotissäätiö

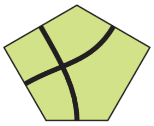
3 pistettä

1. Mikä seuraavista paloista tulisi asettaa koloon kuvion keskelle, jotta musta viiva muodostaisi yhden itsensä leikkaavan lenkin?



A) 

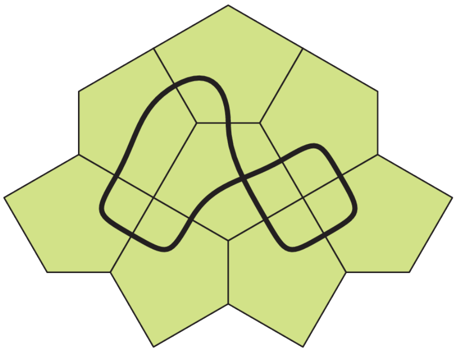
B) 

C) 

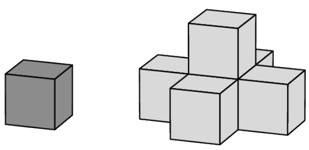
D) 

E) 

Ratkaisu. Paloja täytyy kääntää 180 astetta, jotta ne sopivat koloon. Pala C täydentää kuvion halutulla tavalla.



2. Pöydällä on ensin yksi kuution muotoinen palikka. Tämän jälkeen sen päälle ja ympärille asetetaan kuvan mukaisesti lisää samanlaisia palikoita niin, että alkuperäinen palikka jää piiloon.

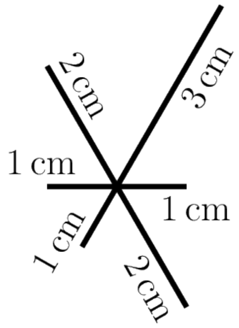


Seuraavassa vaiheessa halutaan piilottaa kaikki edellisen vaiheen palikat. Kuinka monta palikkaa täytyy vähintään lisätä?

A) 8 **B)** 9 **C)** 10 **D)** 13 **E)** 19

Ratkaisu. Pohjakerrokseen tarvitaan kahdeksan, toiseen kerrokseen neljä ja ylimmäksi vielä yksi kuutio, yhteensä 13. Vaihtoehto d) on oikein.

3. Seuraava kuvio halutaan piirtää nostamatta kynää paperista. Piirroksen voi aloittaa ja lopettaa mistä kohdasta hyvänsä. Kuinka pitkän matkan kynän on vähintään liikuttava?



A) 14 cm **B)** 15 cm **C)** 16 cm **D)** 17 cm **E)** 18 cm

Ratkaisu. Piirros kannattaa aloittaa ja lopettaa pisimmistä haaroista (2 cm ja 3 cm), jolloin ne tarvitsee piirtää vain kerran. Muut haarat on piirrettävä kahdesti. Oikea vastaus on b), sillä

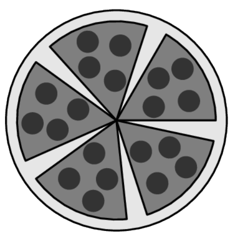
$$3\text{ cm} + 2\text{ cm} + 2 \cdot (2\text{ cm} + 1\text{ cm} + 1\text{ cm} + 1\text{ cm}) = 15\text{ cm}.$$

4. Pöydällä on 6 juomalasia ylösalaisin. Joka siirrolla pitää kääntää mitkä tahansa 4 lasia ympäri. Mikä on pienin määrä siirtoja, joilla kaikki lasit saa käännettyä oikein päin?

A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

Ratkaisu. Yhden siirron jälkeen väärin päin on enää kaksi lasia, joten kahdella siirrolla ei ole mahdollista onnistua. Kolme siirtoa riittää esimerkiksi seuraavasti. Merkitään alassuin olevia laseja A-kirjaimilla, ylössuin olevia Y-kirjaimilla ja käännettäviä lihavoinnilla:
A**AAAA**A
AY**YYYA**
AY**AAA**Y
YYYYYY
Oikea vastaus on siis b).

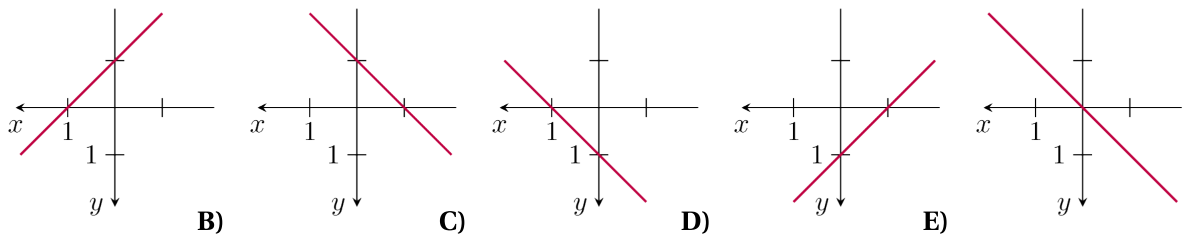
5. Pieni kenguru leikkasi pizzan kuuteen samanlaiseen viipaleeseen. Hän söi yhden viipaleen ja järjesti sitten loput viipaleet niin, että niiden väliset raot olivat yhtä suuret. Kuinka suuren kulman kukin rako muodostaa?



A) 5° **B)** 8° **C)** 9° **D)** 10° **E)** 12°

Ratkaisu. Yhden viipaleen kulma on kuudesosa täyskulmasta eli $\frac{360°}{6} = 60°$. Viiden palan väliin jää viisi rakoa, eli yhden raon kulma on $\frac{60°}{5} = 12°$, eli vaihtoehto e) on oikein.

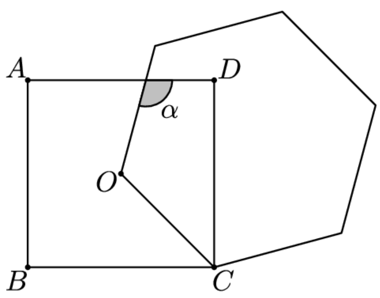
6. Juusolla on erikoinen tapa piirtää xy-taso: positiiviset koordinaattiakselit osoittavat vasemmalle ja alas. Miltä yhtälön $y = x + 1$ ratkaisu näyttäisi Juuson piirtämässä koordinaatistossa?



A) **B)** **C)** **D)** **E)**

Ratkaisu. Kuvaajan pitäisi leikata y-akseli, kun $y = 1$, ja kun x-koordinaatti kasvaa, myös y-koordinaatti kasvaa. Oikea vastaus on siis D.

7. Säännöllisen kuusikulmon yksi sivu on OC, missä O on neliön $ABCD$ keskipiste.



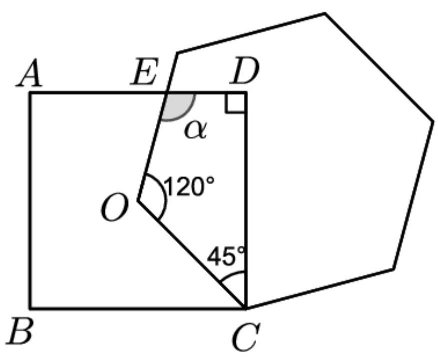
Kuinka suuri on kuvaan merkitty kulma α?

A) $105°$ **B)** $110°$ **C)** $115°$ **D)** $120°$ **E)** $125°$

Ratkaisu. Säännöllisen kuusikulmion kulman suuruus on $120°$ ja neliön lävistäjän ja sivun välinen kulma $45°$. Nelikulmiosta $OCDE$ saadaan kulman α suuruudeksi

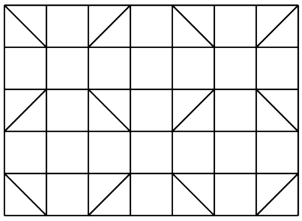
$$\alpha = 360° - 120° - 45° - 90° = 105°.$$

Vaihtoehto a) on siis oikein.



4 pistettä

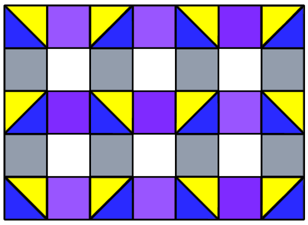
8. Oheisen kuvan neliöt ja kolmiot halutaan värittää niin, että mitkään vierekkäiset kuviot eivät ole samaa väriä. Vierekkäisiksi lasketaan myös ne kuviot, joilla on vain yksi yhteinen kärki.



Kuinka monta väriä vähintään tarvitaan?

A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

Ratkaisu. Kuviossa on kohtia, joissa viiden kuvion kärjet kohtaavat, joten tarvitaan ainakin viisi väriä. Oheinen kuva osoittaa, että viisi väriä riittää. Vaihtoehto c on siis oikein.



9. Opiskelija aloitti luvusta 1 ja kertoi sen joko luvulla 6 tai 10. Sitten hän kertoi tuloksen luvulla 6 tai 10, ja toisti tätä monta kertaa. Mihin seuraavista luvuista hän EI voinut päätyä?

A) $2^{100}3^{20}5^{80}$ **B)** $2^{90}3^{20}5^{70}$ **C)** $2^{90}3^{30}5^{80}$ **D)** $2^{110}3^{80}5^{30}$ **E)** $2^{50}5^{50}$

Ratkaisu. Luvun 6 alkutekijät ovat 2 ja 3, ja luvun 10 alkutekijät 2 ja 5. Tulossa täytyy siis olla tekijänä yhtä monta lukua 2 kuin lukuja 3 ja 5 yhteensä. Muissa vaihtoehdoissa näin on, mutta ei luvussa $2^{90}3^{30}5^{80}$, sillä $90 \neq 30+80$. Oikea vastaus on siis c).

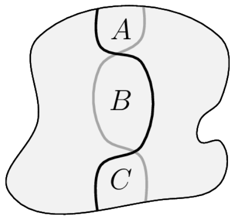
10. Johnilla on paljon samankokoisia kuutioita, jotka ovat kukin joko kokonaan mustia tai kokonaan valkoisia. Hän haluaa tehdä suuremman $3\times3\times3$-kuution liimaamalla yhteen 27 kuutiota. John haluaa, että suuren kuution pinta on puoliksi musta ja puoliksi valkoinen. Mikä on pienin mahdollinen määrä mustia kuutioita, jolla tämä onnistuu?

A) 14 **B)** 13 **C)** 12 **D)** 11 **E)** jokin muu määrä

Ratkaisu. Suuren $3\times3\times3$-kuution nurkkakuutioista näkyy 3 tahkoa, reunakuutioista 2 tahkoa, tahkojen keskikuutioista 1 tahko ja keskimmäisestä kuutiosta ei yhtään.

Yhteensä pikkukuutioiden tahkoja näkyy $6\cdot3\cdot3=54$ kappaletta, joten mustien kuutioiden tahkoja pitää näkyä $54/2=27$ kappaletta. Jotta mustia kuutioita käytettäisiin mahdollisimman vähän, ne kannattaa sijoittaa nurkkiin ja niiden loputtua reunaan. Kaikista kahdeksasta nurkkakuutiosta ja yhdestä reunasta saadaan $8\cdot3+2=26$ mustaa pikkutahkoa, joten tarvitaan vielä yksi tahkon keskikuutio. Pienin mahdollinen määrä on siis $8+1+1=10$ mustaa pikkukuutiota. Vaihtoehto e) on oikein.

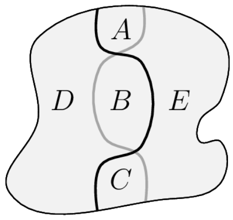
11. Puiston läpi kulkee musta polku ja harmaa polku kuvan mukaisesti. Kumpikin polku jakaa puiston kahteen pinta-alaltaan yhtä suureen osaan.



Mikä seuraavista pinta-aloja A, B ja C koskevista väitteistä on varmasti tosi?

A) $A = C$ **B)** $B = A + C$ **C)** $B = \frac{1}{2}(A + C)$ **D)** $B = \frac{2}{3}(A + C)$ **E)** $B = \frac{3}{5}(A + C)$

Ratkaisu. Nimetään alueet seuraavasti.



Mustan polun vasemmalla puolella on puolet puistosta, eli $D + B$. Harmaan viivan vasemmalla puolella on puolet puistosta, eli $D + A + C$. Koska näiden täytyy olla yhtäsuuret, täytyy olla $B = A + C$. Vaihtoehto b) on siis oikein.

Muut vaihtoehdot eivät välttämättä ole tosia. Jos esimerkiksi $A = 1$, $B = 3$ ja $C = 2$, muiden kuin vaihtoehdon b) yhtälöt eivät päde.

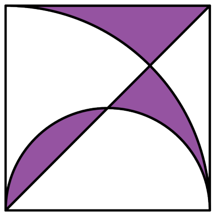
12. Seuraavista erästä positiivista kokonaislukua n koskevista väitteistä täsmälleen yksi on tosi. Mikä väite on tosi?

A) n on jaollinen luvulla 3 **B)** n on jaollinen luvulla 6 **C)** n on pariton
D) $n = 2$ **E)** n on alkuluku

Ratkaisu. Vaihtoehto D ei voi olla totta, koska silloin myös vaihtoehto E olisi totta. Samoin B ei voi olla totta, koska silloin myös A olisi.

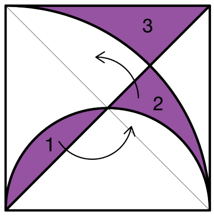
Luku n ei siis ole kaksi, joten jos E olisi totta, myös C olisi, mikä olisi ristiriita. Lauseista tosi on siis joko A tai C. Jos A olisi totta, mutta C ei, B olisi totta, mikä on jälleen ristiriita tehtävänannon kanssa. Oikean vastauksen on siis oltava C.
Luku n on jokin pariton luku, joka ei ole alkuluku eikä jaollinen kolmella, kuten esimerkiksi $n = 25$.

13. Neliöön, jonka sivu on 6 cm, on piirretty kuvan mukaisesti lävistäjä, puoliympyrä ja neljännesympyrä. Kuinka suuri on varjostetun alueen ala neliösenttimetreinä?



A) 9 **B)** 3π **C)** $6\pi - 9$ **D)** $10\pi/3$ **E)** 12

Ratkaisu. Toisen lävistäjän piirtämällä nähdään, että varjostettujen alueiden yhteisala on neljännes koko neliöstä, eli neliösentteinä $\frac{6 \cdot 6}{4} = 9$. Oikea vastaus on siis a).



14. Positiivisille reaaliluvuille p ja q pätee $p < q$. Mikä seuraavista lausekkeista on arvoltaan suurin?

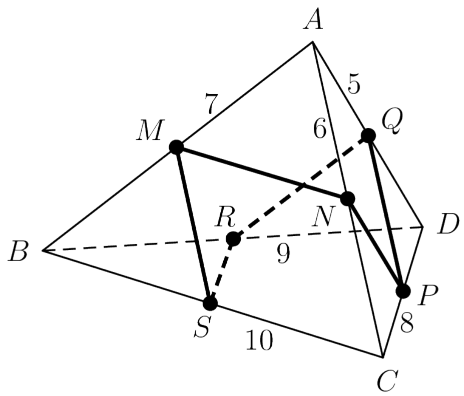
A) $\frac{p+3q}{4}$ **B)** $\frac{p+2q}{3}$ **C)** $\frac{p+q}{2}$ **D)** $\frac{2p+q}{3}$ **E)** $\frac{3p+q}{4}$

Ratkaisu. Murtolausekkeet voidaan laventaa samannimisiksi, jolloin niistä tulee
a) $\frac{p+3q}{4} = \frac{3p+9q}{12}$,
b) $\frac{p+2q}{3} = \frac{4p+8q}{12}$,
c) $\frac{p+q}{2} = \frac{6p+6q}{12}$,
d) $\frac{2p+q}{3} = \frac{8p+4q}{12}$,
e) $\frac{3p+q}{4} = \frac{9p+3q}{12}$.
Koska $p < q$, kohdan a) murtolauseke on suurin.

Tuloksen voi päätellä nopeasti huomaamalla, että kaikki lausekkeet ovat lukujen p ja q painotettuja keskiarvoja, ja lausekkeessa a) luvun q painokerroin $\frac{3}{4}$ on suurin.

5 pistettä

15. Kolmiopohjaisen pyramidin $ABCD$ särmien pituuden ovat $AD = 5$, $AC = 6$, $AB = 7$, $CD = 8$, $BD = 9$ ja $BC = 10$. Pisteet M, N, P, Q, R ja S sijaitsevat särmien keskipisteissä kuvan mukaisesti.



Kuinka suuri on murtoviivan $MNPQRSM$ pituus?

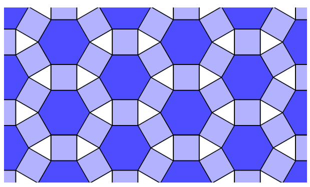
A) 19 **B)** 20 **C)** 21 **D)** 22 **E)** 23

Ratkaisu. Jokainen murtoviivan osa on pituudeltaan puolet jostakin pyramidin särmästä. Esimerkiksi kolmiot AMN ja ABC ovat yhdenmuotoiset mittakaavassa $1:2$, joten $MN = \frac{1}{2}BC$.
Murtoviivan pituudeksi saadaan

$$\frac{1}{2} \cdot (BC + AD + AC + AB + CD + AC) = \frac{1}{2} \cdot (10 + 5 + 6 + 7 + 8 + 6) = 21.$$

Vaihtoehto c) on oikein.

16. Suuren neliön muotoisen kylpyhuoneen lattiaan on suunniteltu seuraavaa kuusikulmion, neliön ja kolmion muotoisista laatoista koostuvaa toistuvaa kuviota.



Kuusikulmiolaattoja arvioidaan tarvittavan 1000 kappaletta. Kuinka monta kolmiota ja neliötä suunnilleen tarvitaan?

A) 1000 neliötä ja 1000 kolmiota
B) 2000 neliötä ja 2000 kolmiota
C) 3000 neliötä ja 3000 kolmiota
D) 2000 neliötä ja 3000 kolmiota
E) 3000 neliötä ja 2000 kolmiota

Ratkaisu. Jokaisen kuusiokulmion ympärillä on kuusi neliötä. Toisaalta jokainen neliö koskee kahteen kuusikulmioon. Yhtä kuusikulmiota kohden on siis $\dfrac{6}{2} = 3$ neliötä.
Vastaavasti jokaisen kuusikulmion ympärillä on kuusi kolmiota, joista jokainen koskee kolmeen kuusikulmioon. Yhtä kuusikulmiota kohden on siis $\dfrac{6}{3} = 2$ kolmiota.

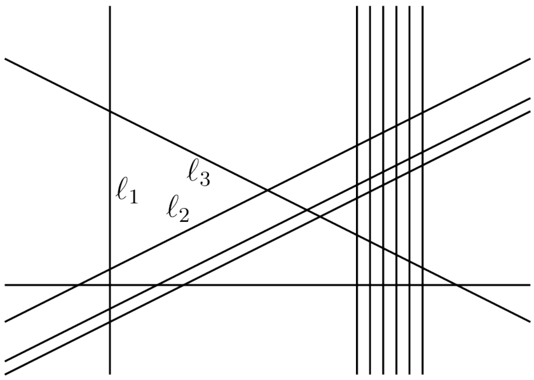
Yhteensä tarvitaan siis noin 3000 neliötä ja 2000 kolmiota, eli vaihtoehto e) on oikein.

17. Tasoon on piirretty n eri suoraa nimeltään $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n$. Suora ℓ_1 leikkaa täsmälleen 5 muuta suoraa, suora ℓ_2 leikkaa täsmälleen 9 muuta suoraa, ja suora ℓ_3 leikkaa täsmälleen 11 muuta suoraa. Mikä on pienin mahdollinen luvun n arvo?

A) 11 **B)** 12 **C)** 13 **D)** 14 **E)** jokin muu

Ratkaisu. Mitkään kaksi suorista ℓ_1, ℓ_2 ja ℓ_3 eivät voi olla yhdensuuntaisia, sillä silloin ne leikkaisivat saman määrän muita suoria. Nämä kolme suoraa leikkaavat siis kaikki toisensa.

Koska suora ℓ_3 leikkaa 11 muuta suoraa, suoria on oltava vähintään 12 kappaletta. Näistä ainakin kuuden muun täytyy olla suoran ℓ_1 suuntaisia, jotta leikkaavia suoria ei tulisi liikaa. Vastaavasti ainakin kahden muun suoran on oltava suoran ℓ_2 suuntaisia. Tämä on mahdollista esimerkiksi seuraavasti.



Pienin mahdollinen luvun n arvo on siis 12, eli vaihtoehto b) on oikein.

Itse asiassa 12 on ainoa mahdollinen suorien määrä. Jos kuvan vaakasuoran suoran kääntäisi yhdensuuntaiseksi jonkin suorista ℓ_1, ℓ_2 tai ℓ_3 kanssa, katoaisi vain yksi leikkaus. Jokainen uusi suora leikkaa kuitenkin vähintään kahta suorista ℓ_1, ℓ_2 tai ℓ_3, joten yhdellekään lisäsuoralle ei ole tilaa.

18. Kenguru ratkaisee yhtälön $ax^2 + bx + c = 0$ ja Majava ratkaisee yhtälön $bx^2 + ax + c = 0$, missä a, b, c ovat keskenään erisuuria nollasta poikkeavia kokonaislukuja. Käy ilmi, että yhtälöillä on yksi yhteinen ratkaisu. Mikä seuraavista on varmasti totta?

A) Yhteisen ratkaisun on oltava $x = 0$.

B) Yhtälöllä $ax^2 + bx + c = 0$ on täsmälleen yksi reaalinen ratkaisu.

C) $a > 0$

D) $b < 0$

E) $a + b + c = 0$

Ratkaisu. Mikäli yhteinen ratkaisu on $x = u$, täytyy päteä

$$au^2 + bu + c = bu^2 + au + c,$$

josta saadaan

$$u^2(a-b) + u(b-a) = 0,$$

ja edelleen

$$(u^2 - u)(a-b) = 0.$$

Koska a ja b ovat erisuuria, täytyy olla

$$0 = u^2 - u = u(u-1).$$

Koska $c \neq 0$, ratkaisu ei voi olla $u = 0$, joten yhteisen ratkaisun täytyy olla $u = 1$. Tästä saamme

$$a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 0, \quad \text{eli} \quad a + b + c = 0.$$

Vaihtoehto e) on siis oikein.
Halutut luvut a, b ja c ovat olemassa, sillä esimerkiksi $a = -1$, $b = 4$ ja $c = -3$ toimivat: tällöin yhtälön $-x^2 + 4x - 3 = 0$ ratkaisut ovat $x = 1$ ja $x = 3$, kun taas yhtälön $4x^2 - x - 3 = 0$ ratkaisut ovat $x = 1$ ja $x = -\frac{3}{4}$. Tämä esimerkki näyttää myös, että ehdot muissa vastausvaihtoehdoissa eivät ole välttämättä voimassa.

19. Annella on kuusi korttia, joista jokaisen kummallekin puolelle on kirjoitettu luku. Korttien lukuparit ovat $(5, 12)$, $(3, 11)$, $(0, 16)$, $(7, 8)$, $(4, 14)$ ja $(9, 10)$. Kortit voi asettaa mihin tahansa järjestykseen ja kummin päin tahansa seuraavan laskun tyhjiin kohtiin:

$$\square + \square + \square - \square - \square - \square = ?$$

Mikä on laskun pienin mahdollinen tulos?

A) -23 **B)** -24 **C)** -25 **D)** -26 **E)** -27

Ratkaisu. On selvää, että kolmessa ensimmäisessä kortissa kannattaa olla päällä kortin pienempi luku ja kolmessa jälkimmäisessä suurempi. Pohditaan, missä tilanteessa korttien asettelua ei kannata enää muuttaa.

Olkoon kolmen ensimmäisen kortin joukossa kortti, jonka isompi luku on A ja pienempi a, jolloin päällä on siis a. Vastaavasti kolmen viimeisen joukossa olkoon kortti, jonka näkyvissä olevalla puolella on suurempi luku B ja alla pienempi b. Näkyvien lukujen erotus on $a - B$. Jos kortit vaihdetaan, saadaan erotukseksi $b - A$. Vaihto ei tuo pienennystä, mikäli $a - B \leq b - A$, eli $a + A \leq b + B$. Kolmeksi ensimmäiseksi kortiksi kannattaa siis valita ne, joiden lukujen summa on mahdollisimman pieni.

Kolme ensimmäistä korttia ovat siis $(3, 11)$, $(7, 8)$ ja $(0, 16)$, ja jälkimmäiset kolme $(5, 12)$, $(4, 14)$ ja $(9, 10)$. Laskun pienin mahdollinen tulos on siis

$$3 + 7 + 0 - 12 - 14 - 10 = -26.$$

Vaihtoehto d) on oikein.

20. Funktion f määrittelyjoukko on reaalilukujen joukko ja funktion arvot ovat reaalilukuja. Kaikille reaaliluvuille x pätee

$$f(20 - x) = f(22 + x).$$

Tiedetään, että funktiolla f on täsmälleen kaksi nollakohtaa. Mikä on näiden nollakohtien summa?

A) -1 **B)** 20 **C)** 21 **D)** 22 **E)** Ei mikään edellisistä

Ratkaisu. Olkoon toinen nollakohdista a. Valitaan sellainen x, että $20 - x = a$, eli $x = 20 - a$. Saadaan

$$0 = f(a) = f(20 - x) = f(22 + x) = f(22 + 20 - a) = f(42 - a).$$

Myös $b = 42 - a$ on siis nollakohta. Näiden nollakohtien summa on $a + b = a + 42 - a = 42$, eli vaihtoehto e) on oikein.

Täytyy kuitenkin vielä tarkistaa, että a ja b ovat varmasti eri nollakohdat. Jos olisi $a = b$, pätisi $a = 42 - a$, eli $a = 21$. Tällöin toisen juuren tulisi olla $c \neq 21$. Mutta koska $c \neq 21$, täytyisi olla $c \neq 42 - c$, jolloin sekä 21, c että $42 - c$ olisivat nollakohtia, mikä on ristiriita.

21. Hämmästyttävää kyllä on olemassa nelinumeroinen luku $\overline{abcd}$, jolle pätee

$$\overline{abcd} = a^a + b^b + c^c + d^d.$$

Merkinnällä $\overline{abcd}$ tarkoitetaan, että nelinumeroisen luvun numerot ovat a, b, c ja d tässä järjestyksessä. Kuinka suuri on a?

A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

Ratkaisu. Koska nopeasti arvioiden $6^6 > 10000$, ei luvussa voi olla kuutosta tai sitä suurempia numeroita.

Toisaalta $4^4 = 256$, joten ilman lukua 5 summa jää liian pieneksi: $4^4+4^4+4^4+4^4 = 1024$, ja pienemmillä luvuilla ei päästä edes nelinumeroiseen summaan. Koska $5^5 = 3125$, viitosia ei voi olla kahta, sillä silloin ensimmäinen numero olisi jo liian suuri, ainakin kuusi.

Viitosia täytyy siis olla tasan yksi kappale ja muiden numeroiden pienempiä. Koska $1^1 = 1$, $2^2 = 4$, $3^3 = 27$ ja $4^4 = 256$, nämä muut numerot eivät riitä viemään summaa yli luvun 4000, joten ensimmäisen numeron täytyy olla $a = 3$. Oikea vastaus on siis b).

Mysteeriluku on itse asiassa $n = 3435 = 3^3 + 4^4 + 3^3 + 5^5$.