KENGURU 2020

Tehtävien ratkaisut

3 pistettä

Kysymys	1	2	3	4	5	6	7	8
Vastaus	D	A	B	D	B	A	A	E

4 pistettä

Kysymys	9	10	11	12	13	14	15	16
Vastaus	B	D	C	C	B	D	A	E

5 pistettä

Kysymys	17	18	19	20	21	22	23	24
Vastaus	B	D	E	C	A	A	B	C

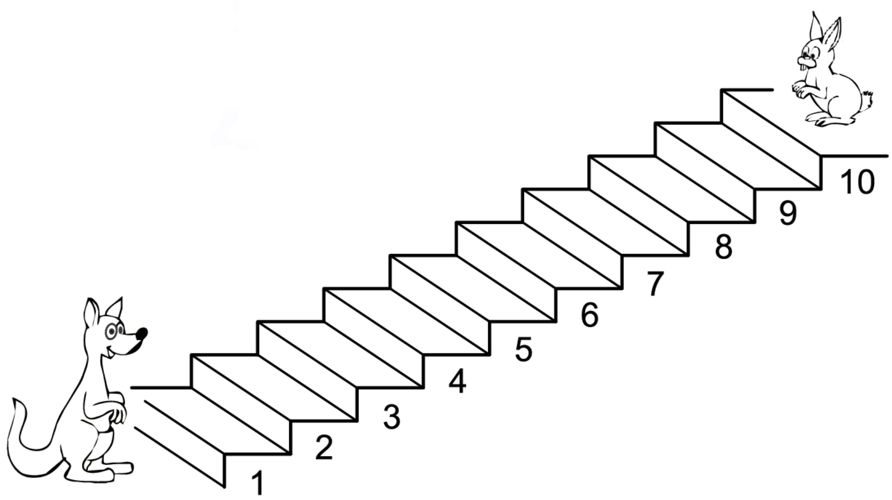
Kengurulogon 2020 suunnitteli Matias McAteer

Association Kangourou sans Frontières

Maunulan yhteiskoulu
HELSINGIN MATEMATIIKKALUKIO

OPETUSHALLITUS RAHOITTAA HANKETTA

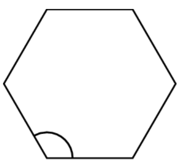
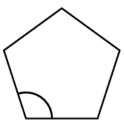
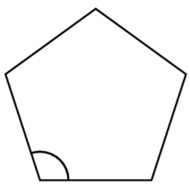
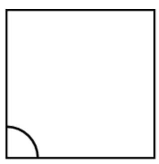
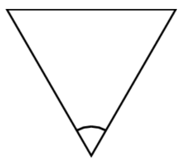
1. Kenguru ja jänis hyppivät portaikossa vuorotellen. Kenguru hyppii ylös 3 rappusta kerrallaan ja jänis loikkii alas 2 rappusta kerrallaan. Millä rappusella he kohtaavat toisensa?



A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

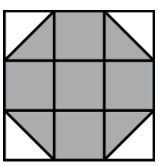
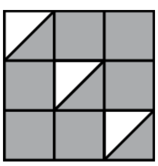
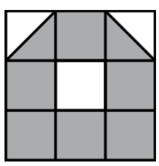
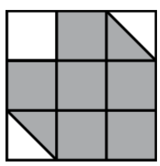
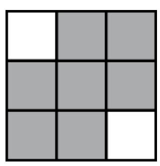
Ratkaisu. Ensimmäisten loikkiensa jälkeen kenguru on rappusella $0+3=3$ ja jänis rappusella $10-2=8$. Toisten loikkiensa jälkeen kenguru on rappusella $3+3=6$ ja jänis niin ikään rappusella $8-2=6$. He kohtaavat toisensa siis rappusella 6.
Vaihtoehtoisesti voi myös ajatella niin, että jokaisen hyppyparin jälkeen eläinten etäisyys portaikossa pienenee $2+3=5$ portaalla, ja koska aluksi etäisyys on $10=2\cdot 5$ porrasta, on eläinten kohdattava kahden hyppyparin jälkeen. Kenguru on näiden aikana hyppinyt portaalle $3+3=6$.

2. Alla on viisi säännöllistä monikulmiota, joista jokaisesta on merkitty yksi kulma. Mikä kulmista on suurin?

A)  **B)**  **C)**  **D)**  **E)** 

Ratkaisu. Vaihtoehdon e) tasasivuisessa kolmiossa merkitty kulma on 60° ja vaihtoehdon d) neliössä 90°. Vaihtoehtojen b) ja c) säännöllisissä viisikulmioissa merkityt kulmat ovat yhtä suuret, nimittäin 108°. Tämän näkee vaikkapa jakamalla viisikulmio kolmeksi kolmioksi, jolloin viisikulmion kulmien summa on kolmen kolmion kulmien summa, eli $3\cdot 180° = 540°$. Silloin yhden kulman on oltava $540°/5 = 108°$. Vastausvaihtoehdon a) säännöllisessä kuusikulmiossa merkitty kulma on 120°. Tämän näkee vaikkapa jakamalla säännöllinen kuusikulmio kuudeksi tasasivuiseksi kolmioksi, jolloin kuusikulmion yksi kulma on yhtä suuri kuin kaksi tasasivuisen kolmion kulmaa, eli $2\cdot 60° = 120°$. Täten vastausvaihtoehdon a) kulma on suurin.

3. Missä seuraavista kuvista on varjostettu eniten pinta-alaa?

A)  **B)**  **C)**  **D)**  **E)** 

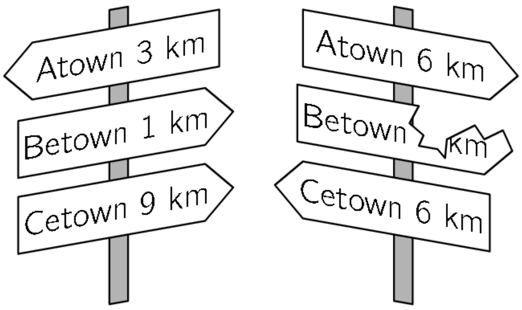
Ratkaisu. Jos yhden pienen neliön ala on N, niin koko kuvion ala on $9N$ ja yhden kuvioista löytyvän kolmion ala on $N/2$. Siten vaihtoehdon a) kuvassa on varjostettu $9N - 4 \cdot N/2 = 7N$, vaihtoehdon b) kuvassa $9N - 3N/2 = 7{,}5 \cdot N$, vaihtoehtojen c) ja d) kuvissa molemmissa $9N - 2 \cdot N/2 - N = 7N$, ja vaihtoehdon e) kuvassa $9N - 2N = 7N$. Siten vaihtoehdon b) kuvassa varjostettu ala on suurin.

4. Kun seuraavien laskutoimitusten lopputulokset laitetaan järjestykseen pienimmästä suurimpaan, niin mikä niistä tulee keskelle?

A) $1+2345$ **B)** $12+345$ **C)** $123+45$ **D)** $1234+5$ **E)** 12345

Ratkaisu. Vaihtoehtojen a), b), c), d) ja e) lopputulokset, tässä järjestyksessä, ovat 2346, 357, 168, 1239 ja 12345. Näiden suuruusjärjestys on $168 < 357 < 1239 < 2346 < 12345$. Siten keskelle tulee $1234 + 5 = 1239$.
Tässä voi myös halutessaan ajatella vaikkapa niin, että laskutoimitusten a) ja e) lopputulokset ovat varmasti suurempia kuin esimerkiksi 2000, kun taas b)- ja c)-laskutoimitusten lopputulokset ovat pienempiä kuin vaikkapa $500 + 500 = 1000$. Siten vaihtoehdon d) laskutoimituksen lopputuloksen, 1239, täytyy olla keskimmäinen.

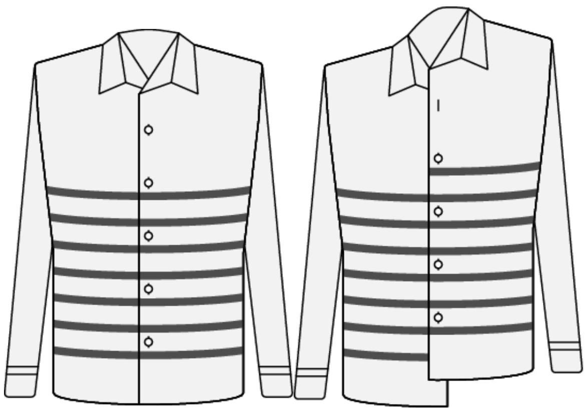
5. Lyhin reitti kaupungista Atown kaupunkiin Cetown kulkee kaupungin Betown kautta. Kun kävelemme tätä reittiä kaupungista Atown kaupunkiin Cetown, näemme ensin vasemmanpuoleiset kyltit. Myöhemmin vastaamme tulevat oikeanpuoleiset kyltit. Mikä etäisyys rikkinäisestä kyltistä puuttuu?



A) 1 km **B)** 2 km **C)** 3 km **D)** 4 km **E)** 5 km

Ratkaisu. Kylteistä voi päätellä, että etäisyys kaupunkien Atown ja Cetown välillä on 12 km. Vasemmanpuoleisista kylteistä voi päätellä, että etäisyys kaupunkien Atown ja Betown välillä on 4 km. Siten etäisyys kaupunkien Betown ja Cetown välillä on 8 km, ja kyltistä täytyy puuttua etäisyys $8\,\text{km} - 6\,\text{km} = 2\,\text{km}$.

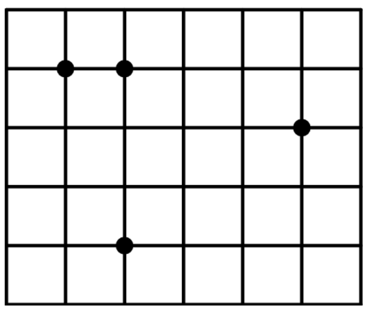
6. Kun Cosmo laittaa uuden hienon paitansa päälleen oikein, kuten vasemmanpuoleisessa kuvassa, sen vyötärölle muodostuu seitsemän vaakasuoraa suljettua rengasta. Tänä aamuna hän vahingossa napitti paitansa väärin, kuten oikeanpuoleisessa kuvassa. Kuinka monta suljettua rengasta Cosmon paidan vyötäröllä on tänään?



A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

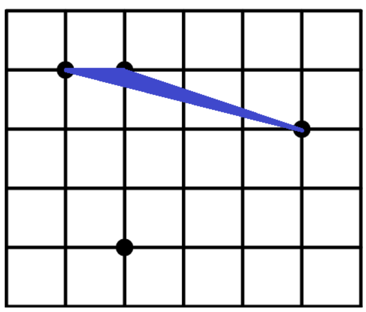
Ratkaisu. Oikea vastausvaihtoehto on a). Suljettuja renkaita ei nimittäin ole ainuttakaan, vaan paidan renkaista muodostuukin spiraali.

7. Neljä pistettä on merkitty ruudukkoon, jonka jokainen ruutu on neliö, jonka sivun pituus on 1. Jos näistä pisteistä valitsee kolme kolmion kärjiksi, niin mikä on näin muodostetun kolmion pienin mahdollinen ala?

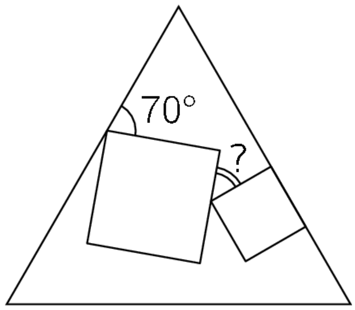


A) $\frac{1}{2}$ **B)** 1 **C)** $\frac{3}{2}$ **D)** 2 **E)** $\frac{5}{2}$

Ratkaisu. Miten tahansa kolme pistettä valitseekin, syntyvässä kolmiossa jokaisen sivun pituus on välttämättä vähintään 1 ja jonkin sivun vastaisen korkeusjanan pituus niin ikään vähintään 1. Siten kolmion ala on välttämättä vähintään $1 \cdot 1/2 = 1/2$. Toisaalta, valitsemalla kolme ylintä merkittyä pistettä kuvasta saadaan kolmio, jonka kanta ja korkeus ovat molemmat yhtä suuria kuin 1, jolloin ala on täsmälleen $1/2$:

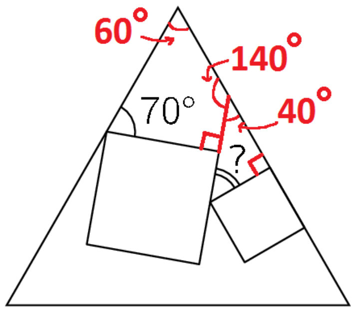


8. Kaksi erisuurta neliötä piirretään tasasivuisen kolmion sisälle. Neliöistä toisen yksi sivu on kolmion sivulla, kuten kuvassa. Kuinka suuri on kuvaan kysymysmerkillä merkitty kulma?

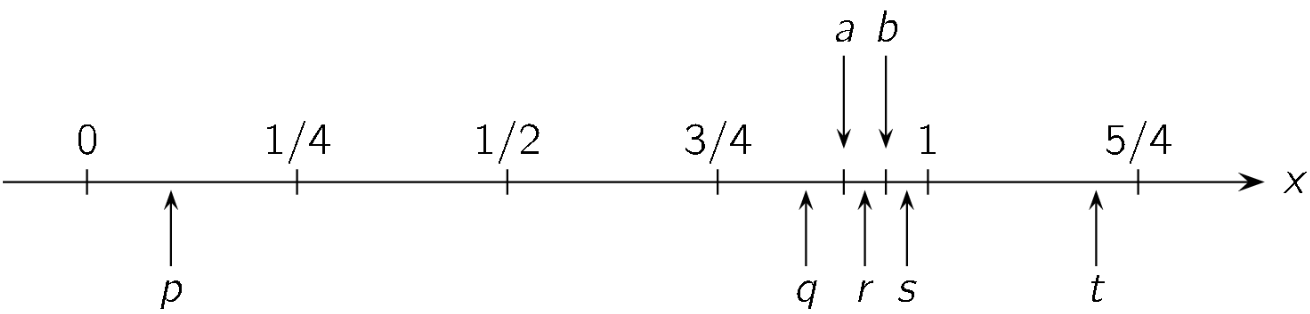


A) 25° **B)** 30° **C)** 35° **D)** 45° **E)** 50°

Ratkaisu. Kun suuremman neliön sivua jatketaan kuvan mukaisesti, syntyy nelikulmio, jonka kulmat ovat 90°, 70°, 60° ja 360° − 90° − 70° − 60° = 140°. Kysymysmerkkikulman sisältävän suorakulmaisen kolmion viimeinen kulma on siis 180° − 140° = 40°, eli kysymysmerkkikulman suuruus on 90° − 40° = 50°.



9. Reijo merkitsee lukusuoralle kaksi pistettä a ja b mahdollisimman tarkasti. Mikä pisteistä p, q, r, s ja t parhaiten kuvaa tuloa ab?



A) p **B)** q **C)** r **D)** s **E)** t

Ratkaisu. Luvut a ja b ovat molemmat pienempiä kuin 1, joten niiden tulo on myös pienempi kuin 1, joten piste t ei käy. Itse asiassa vieläpä $ab < a$, joten myöskään pisteet r ja s eivät käy. Lisäksi, koska varmasti $a > 1/2$ ja $b > 1/2$, on oltava $ab > 1/4$, joten piste p ei käy. Jäljelle jää vain piste q, joka on kuin onkin realistinen vaihtoehto, sillä $b \approx 1$, jolloin $ab \approx a$, eli ab on lähellä pistettä a mutta sen vasemmalla puolella, kuten piste q kuvassa.

10. Mikä on tulon $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ kahden viimeisen numeron summa?

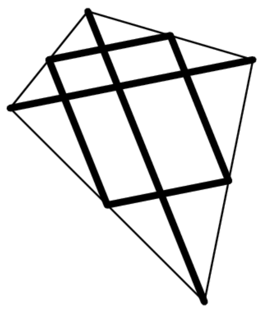
A) 2 **B)** 4 **C)** 6 **D)** 8 **E)** 16

Ratkaisu. Voimme laskea

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = (3 \cdot 4)^2 \cdot 2 \cdot (2 \cdot 5) = 12^2 \cdot 2 \cdot 10 = 144 \cdot 2 \cdot 10 = 2880.$$

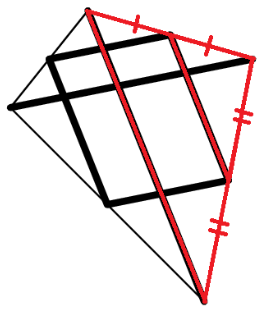
Siten tulon kahden viimeisen numeron summa on $8 + 0 = 8$.
Todettakoon, että koko tuloa ei kuitenkaan tarvitse laskea tässä. Jos vain on ensin ottanut tekijät $2 \cdot 5 = 10$ erilleen, ja todennut, että tulo päättyy nollaan, niin jäljelle jäävien tekijöiden $3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$ tulon viimeinen numero antaa alkuperäisen tulon toiseksi viimeisen numeron. Koska lisäksi positiivisten kokonaislukujen tulon viimeinen numero riippuu vain tulontekijöiden viimeisistä numeroista, viimeksi mainittua tuloa voi laskea niin, että unohtaa jokaisella askeleella muut kuin tekijöiden viimeiset numerot: tulon $3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$ viimeinen numero on sama kuin tulon $12 \cdot 12 \cdot 2$, joka puolestaan on sama kuin tulon $2 \cdot 2 \cdot 2$, joka on 8.

11. Martin tekee alla olevan kuvan mukaisen leijan pilkkomalla kepin kuuteen osaan. Kaksi niistä ovat pituuksiltaan 120 cm ja 80 cm, ja hän käyttää ne leijan lävistäjinä. Loput neljä yhdistävät leijan sivujen keskipisteet, kuten kuvassa. Kuinka pitkä alkuperäinen keppi oli?



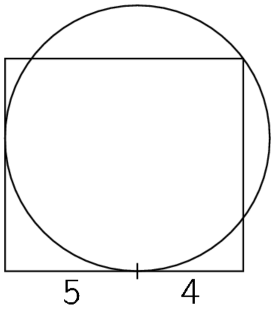
A) 300 cm **B)** 370 cm **C)** 400 cm **D)** 410 cm **E)** 450 cm

Ratkaisu. Jos kolmion kahden sivun keskipisteet yhdistää, niin saamme janan, joka on yhdensuuntainen kolmannen kolmion sivun kanssa, mutta pituudeltaan puolet. Tämän näkee esimerkiksi toteamalla, että keskipisteet yhdistävä jana erottaa alkuperäisestä kolmiosta kolmion, joka on alkuperäisen kanssa yhdenmuotoinen vaikkapa sks-yhdenmuotoisuuslauseen nojalla, ja jossa sivut ovat pituuksiltaan puolet alkuperäisistä sivuista. Esimerkiksi, alla olevassa kuvassa punainen sivujen keskipisteitä yhdistä keppi on siten puolet punaisen lävistäjäkepin pituudesta:



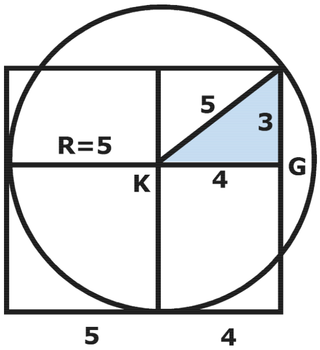
Tästä seuraa, että sivujen keskipisteitä yhdistävät palat ovat yhteensä yhtä pitkät kuin lävistäjäpalat ovat yhteensä, koska kukin keskipisteitä yhdistävistä paloista on pituudeltaan puolet samansuuntaisen lävistäjän pituudesta. Siispä keppi oli aluksi pituudeltaan senttimetreissä $2 \cdot (120 + 80) = 400$.

12. Tasoon on piirretty ympyrä ja suorakulmio niin, että ympyrä sivuaa kahta suorakulmion sivuista ja kulkee erään suorakulmion kärjen kautta, kuten kuvassa alla. Toinen sivuamispisteistä pilkkoo suorakulmion sivun osiin, joiden pituudet ovat 5 ja 4. Mikä on suorakulmion ala?



A) 27π **B)** 25π **C)** 72 **D)** 63 **E)** Ei mikään edellisistä.

Ratkaisu. Piirtäkäämme sivuamispisteiden kautta suorakulmion sivuille normaalit, jotka molemmat luonnollisesti kulkevat ympyrän keskipisteen K kautta. Täten ympyrän säde on $R = 5$. Oikean ylänurkan suorakulmaisessa kolmiossa on vaakasuora kateetti $KG = 4$ ja hypotenuusa 5, joten Pythagoraan lauseen nojalla sen pystysuora kateetti on 3 ja suorakulmion pystysuora sivu $3 + 5 = 8$. Suorakulmion sivut ovat siis 8 ja 9, joten sen ala on $8 \cdot 9 = 72$.



13. Olkoot a, b ja c kokonaislukuja. Mikä seuraavista EI ole lausekkeen

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$$

mahdollinen arvo?

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 6 **E)** 8

Ratkaisu. Lauseke voi saada arvot 0, 2, 6 ja 8, koska esim.

$$\begin{cases} (0-0)^2 + (0-0)^2 + (0-0)^2 = 0+0+0 = 0, \\ (1-0)^2 + (0-1)^2 + (1-1)^2 = 1+1+0 = 2, \\ (1-2)^2 + (2-3)^2 + (3-1)^2 = 1+1+4 = 6, \quad \text{ja} \\ (2-0)^2 + (0-2)^2 + (2-2)^2 = 4+4+0 = 8. \end{cases}$$

Toisaalta, lauseke ei voi koskaan saada arvoa 1. Tämä seuraa vaikkapa siitä havainnosta, että

$$\begin{aligned} (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ca + a^2 \\ &= 2\left(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca\right), \end{aligned}$$

jolloin lauseke tietenkin voi saada vain parillisia arvoja.
Arvon 1 mahdottomuuden voi nähdä myös sitä kautta, että jos neliöiden summa $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$ olisi 1, niin kahden neliöistä olisi oltava nollia ja yhden yksi, sillä ovathan nämä neliöt epänegatiivisia kokonaislukuja. Mutta kun kaksi neliöistä olisi nollia, niin ainakin kaksi erotuksista $a-b$, $b-c$ ja $c-a$ olisi nollia, mistä itse asiassa seuraisi, että $a = b = c$, jolloin kolmannenkin neliön olisi oltava nolla.

14. Olkoot a, b ja c kokonaislukuja, joille $1 \leqslant a \leqslant b \leqslant c$ ja $abc = 1\,000\,000$. Mikä on luvun b suurin mahdollinen arvo?

A) 100 **B)** 250 **C)** 500 **D)** 1000 **E)** 2000

Ratkaisu. Koska $a \geqslant 1$ ja $c \geqslant b$, voimme arvioida

$$1000^2 = 1000000 = abc \geqslant 1 \cdot b \cdot b = b^2,$$

joten $b \leqslant 1000$. Toisaalta, kokonaisluvuille 1, 1000 ja 1000 pätee sekä

$$1 \leqslant 1 \leqslant 1000 \leqslant 1000$$

että

$$1 \cdot 1000 \cdot 1000 = 1000000,$$

joten 1000 todella on luvun b mahdollinen arvo.

15. Olkoon $17x + 51y = 102$, missä x ja y ovat reaalilukuja. Mikä on lausekkeen $9x + 27y$ arvo?

A) 54 **B)** 36 **C)** 34 **D)** 18 **E)** Arvoa ei voi määrittää.

Ratkaisu. Jos jaamme yhtälön luvulla 17, saamme yhtälön $x + 3y = 6$. Jos sitten kerromme tämän luvulla 9, näemme, että on oltava $9x + 27y = 54$.
Todettakoon, että yhtälön $17x + 51y = 102$ toteuttavia reaalilukupareja on äärettömän monta. Voimme nimittäin esimerkiksi valita luvun y arvon miten tahansa, ja yhtälö silti toteutuu kunhan vain valitsemme sitten $x = 6 - 3y$.

16. Maryllä on kymmenen paperinpalaa. Jotkin niistä ovat muodoltaan neliöitä ja loput kolmioita. Mary leikkaa kolme neliöistä viistosti kärjestä vastakkaiseen kärkeen. Tämän jälkeen hänellä on 13 paperinpalaa, joilla hän toteaa olevan kaikkiaan 42 kärkeä. Kuinka monta kolmiota hänellä oli aluksi?

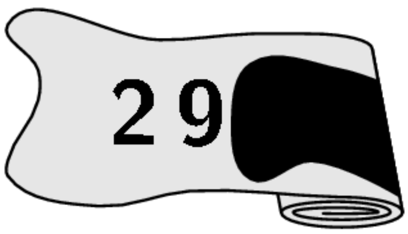
A) 8 **B)** 7 **C)** 6 **D)** 5 **E)** 4

Ratkaisu. Jos alussa Maryllä oli k kolmiota, niin neliöitä oli $10-k$. Kolmen neliön pilkkomisen jälkeen neliöitä oli $10 - k - 3 = 7 - k$ ja kolmioita $k + 6$. Näillä on kärkiä yhteensä

$$42 = 4\,(7 - k) + 3\,(k + 6) = 28 - 4k + 3k + 18 = 46 - k,$$

joten alussa kolmioita oli $k = 46 - 42 = 4$ kappaletta.
Vaihtoehtoisesti voisimme ratkaista ongelman näin: Lopussa on 13 palaa, joissa on 42 kärkeä. Koska 13 kolmiossa on $3 \cdot 13 = 39$ kärkeä, täytyy neliöitä olla lopussa $42 - 39 = 3$ kappaletta. Alussa neliöitä oli kolme enemmän, eli 6 kappaletta, joten kymmenestä alkuperäisestä paperinpalasta loput 4 olivat kolmioita.

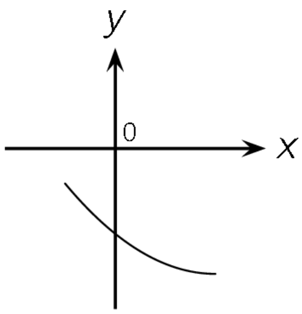
17. Satanumeroisen positiivisen kokonaisluvun kaksi ensimmäistä numeroa ovat 2 ja 9. Kuinka monta numeroa sen neliössä on?



A) 101 **B)** 199 **C)** 200 **D)** 201 **E)** Ei voi määrittää annetuin tiedoin.

Ratkaisu. Merkitään kyseistä satanumeroista lukua kirjaimella A. Tällöin $10^{99} < A < 3 \cdot 10^{99}$, joten $10^{198} < A^2 < 9 \cdot 10^{198} < 10 \cdot 10^{198} = 10^{199}$. Siten neliöllä A^2 on oltava tasan 199 numeroa.

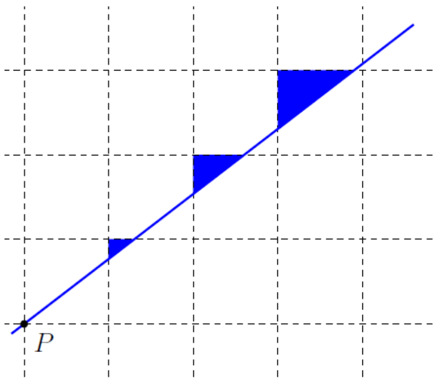
18. Olkoot a, b ja c reaalilukuja. Alla olevaan kuvaan on piirretty yhtälön $y = ax^2 + bx + c$ määräämän paraabelin kaari. Mikä seuraavista luvuista on positiivinen?



A) c **B)** $b+c$ **C)** ac **D)** bc **E)** ab

Ratkaisu. Koska paraabeli leikkaa y-akselin x-akselin alapuolelta, on oltava $c < 0$. Koska paraabeli aukeaa ylöspäin, on oltava $a > 0$. Lisäksi tiedämme nyt, että $ac < 0$. Paraabelin huipun x-koordinaatti on tietenkin $-b/2a$, ja tämä on kuvan perusteella positiivinen. Koska a oli myös positiivinen, on luvun b oltava negatiivinen. Täten $b+c$ on kahden negatiivisen luvun summana negatiivinen, ja ab positiivisen ja negatiivisen luvun tulona myös negatiivinen. Lopuksi, bc on kahden negatiivisen luvun tulona positiivinen.

19. Pieni kenguru piirtää ruutupaperille pisteen P kautta kulkevan suoran ja värittää kolme näin syntyvää kolmiota kuten kuvassa.



Mikä seuraavista on mahdollinen kolmioiden alojen suhde?

A) $1:2:3$ **B)** $1:2:4$ **C)** $1:3:9$ **D)** $1:4:8$ **E)** Mikään edellisistä ei ole mahdollinen.

Ratkaisu. Kaikki kolme kolmiota ovat suorakulmaisia, ja koska suora leikkaa pystysuorat ruudukon suorat samassa kulmassa, ovat kolmiot yhdenmuotoisia keskenään. Jos pisteen P koordinaatit ovat $(0,0)$, niin vasemmanpuoleisimman kolmion vasemman alanurkan koordinaatit ovat $(1, 1-\delta)$, missä δ on kolmion pystysuoran kateetin pituus. Silloin keskimmäisen kolmion vasemman alanurkan koordinaatit ovat $(2, 2-2\delta)$ ja oikeanpuoleisimman $(3, 3-3\delta)$. Keskimmäisen kolmion pystysuoran kateetin pituus on 2δ ja oikeanpuoleisimman 3δ. Kolmioiden sivujen suhteet ovat siis $1:2:3$, jolloin niiden alojen suhteet ovat $1:4:9$.

20. Anna kirjoittaa 4×4-ruudukon jokaiseen ruutuun luvun niin, että jokaisessa sarakkeessa ja jokaisella rivillä lukujen summa on aina sama. Hän on jo ehtinyt kirjoittaa ruudukkoon lukuja, kuten kuvassa alla. Minkä luvun hän kirjoittaa varjostettuun ruutuun?

1		6	3
	2	2	8
	7		4
		7	

A) 5 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9

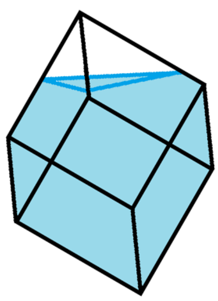
Ratkaisu. Ylimmällä rivillä ja toiseksi vasemmanpuoleisella sarakkeella on yhteinen luku, sanokaamme x, joten toiseksi vasemman sarakkeen alin luku on välttämättä $6+3+1-2-7=1$. Nyt alimmalla rivillä ja oikeanpuoleisimmalla sarakkeella on jälleen yhteinen luku, sanokaamme y, ja harmaaseen ruutuun on tultava luku $3+8+4-7-1=7$.

1	x	6	3
	2	2	8
	7		4
7	1	7	y

21. Jäävuori on kuution muotoinen. Täsmälleen 90 % sen tilavuudesta on vedenpinnan alla. Kolme kuution särmistä näkyy osittain vedenpinnan yläpuolella. Näkyvät särmien osat ovat pituuksiltaan 24 m, 25 m ja 27 m. Kuinka pitkä on kuution särmä?

A) 30 m **B)** 33 m **C)** 34 m **D)** 35 m **E)** 39 m

Ratkaisu.



Jos kuution särmä on a, niin jäävuoren tilavuus on a^3. Veden pinnan yläpuolella näkyvän osan tilavuus on $a^3/10$. Toisaalta, veden pinnan yläpuolella oleva jää muodostaa kartion, jonka tilavuus on

$$\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 24\,\mathrm{m}\cdot 25\,\mathrm{m}\right)\cdot 27\,\mathrm{m} = 2700\,\mathrm{m}^3.$$

Siten $a^3 = 27000\,\mathrm{m}^3 = (30\,\mathrm{m})^3$, eli $a = 30\,\mathrm{m}$.

22. Alice, Belle ja Cathy päättivät järjestää keskenään kädenvääntöturnauksen. Jokaisella kierroksella kaksi heistä kilpaili keskenään, ja kolmas lepäsi. Jokaisen kierroksen jälkeen voittaja jatkoi seuraavalle kierrokselle, ja häviäjä lepäsi seuraavan kierroksen. Kaikkiaan Alice osallistui 10 kertaa, Belle 15 kertaa, ja Cathy 17 kertaa. Kuka hävisi toisen kierroksen?

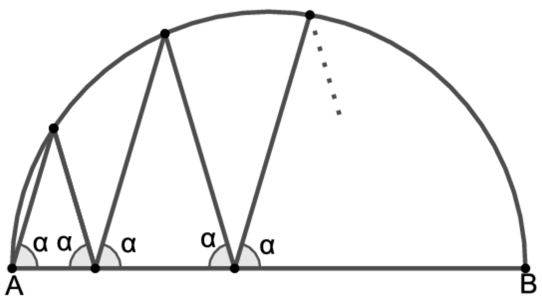
A) Alice **B)** Belle **C)** Cathy

D) Kumpi tahansa Alicestä ja Bellestä on voinut hävitä toisen kierroksen.

E) Kumpi tahansa Bellestä ja Cathystä on voinut hävitä toisen kierroksen.

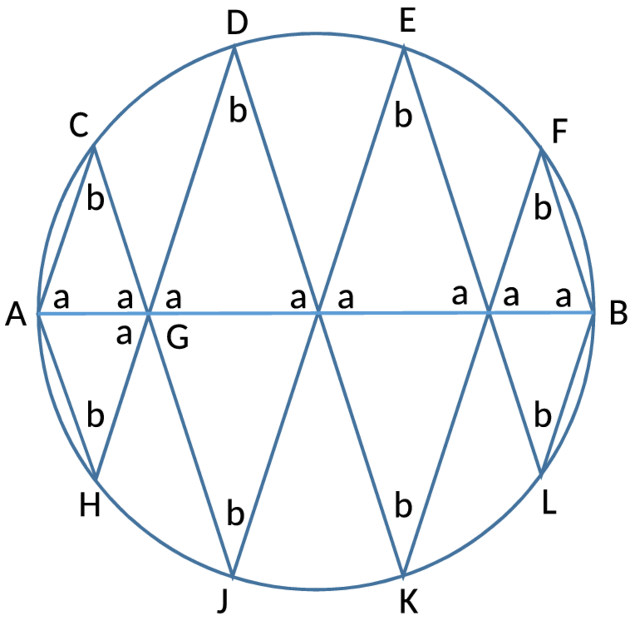
Ratkaisu. Kierroksia oli kaikkiaan $(10+15+17)/2 = 21$. Koska Alice lepäsi $21-10 = 11$ kierroksen aikana ja kukaan ei voi levätä kahta peräkkäistä kierrosta, Alicen täytyi levätä täsmälleen kaikilla parittomilla kierroksilla. Täten hänen on täytynyt hävitä toinen kierros. Tämä on mahdollinen skenaario, jos vaikkapa, nimeten pelaajat ilmeisellä tavalla A, B ja C, eri kierroksilla pelasivat parit BC, AB, BC, AB, BC, AB, BC, AB, BC, AC, BC, AC, BC, AC, BC, AC, BC, AC, BC, AC, BC, tässä järjestyksessä.

23. Murtoviiva alkaa pisteestä A, joka on erään ympyrän halkaisijan AB toinen päätepiste. Murtoviivan taitoskohdat ovat kuvan mukaisesti vuorotellen ympyrän kehällä ja halkaisijalla AB. Lisäksi murtoviiva kohtaa halkaisijan aina kulmassa α. Neljän huipun jälkeen murtoviiva päättyy pisteeseen B. Kuinka suuri on kulma α?

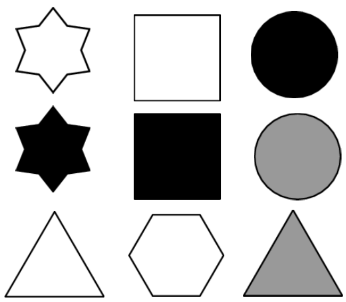


A) 60° **B)** 72° **C)** 75° **D)** 80° **E)** Jonkin muun suuruinen.

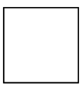
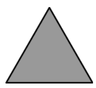
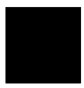
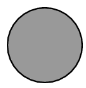
Ratkaisu. Peilataan koko kuvio alla olevan kuvan mukaisesti halkaisijan AB suhteen, jolloin saamme yhtä suuret kaariparit $AC = AH$, $CD = HJ$, jne. Pisteet D, G ja H ovat samalla suoralla, koska kuvioon syntyy yhtä suuria kulmia, jotka on merkitty kirjaimella α. Huomaamme myös, että suorat AC ja HD ovat yhdensuuntaiset, jolloin saamme myös yhtä suuret kaaret $CD = AH$. Erityisesti, nyt kaarille on pädettävä $AC = AH = CD = HJ$. Samassa hengessä voimme todeta, että itse asiassa kaikki kaaret ovat keskenään yhtä pitkiä. Täten 10-kulmio $ACDEFBLKJH$ on säännöllinen.
Pilkkomalla 10-kulmio kahdeksaksi kolmioksi, huomaamme, että 10-kulmion kulmien summa on $8 \cdot 180° = 1440°$, jolloin yhden kulman on oltava kymmenesosa tästä, eli 144°. Erityisesti on oltava $\alpha = 144°/2 = 72°$.



24. Adam ja Britt yrittävät selvittää, mikä seuraavista kuvioista on Carlin suosikki.



Adam tietää, että Carl on kertonut Brittille suosikkikuvionsa muodon. Britt taas tietää, että Carl on kertonut Adamille sen värin.
Adam sanoo: ”En tiedä Carlin lempikuviota, ja tiedän, ettei Britt myöskään tiedä sitä.”
Britt vastaa: ”Ensin en tietänyt Carlin suosikkikuviota, mutta nyt tiedän.”
Tähän Adam vastaa: ”Nyt tiedän minäkin.”
Mikä on Carlin suosikkikuvio?

A)  **B)**  **C)**  **D)**  **E)** 

Ratkaisu. Jos kuvio olisi kuusikulmion muotoinen, Britt tietäisi kuvion pelkän muodon perusteella. Siten kuvio ei voi olla kuusikulmion muotoinen. Koska Adam siis tietää aluksi varmasti, että kuvio ei voi olla kuusikulmio, ei kuvio voi olla valkea.

Jos kuvio olisi ympyrän muotoinen, niin kuvio voisi Brittin näkökulmasta olla edelleen niin harmaa kuin mustakin. Täten kuvio ei voi olla ympyrä, sillä tieto siitä, että kuvio ei ole valkea, paljasti Brittille kuvion värin.

Lopuksi, jos kuvio olisi musta, niin kuvio voisi lopuksi olla Adamin näkökulmasta niin musta tähtönen kuin musta neliökin. Siten kuvio ei ole musta, vaan sen täytyy olla harmaa, ja kyseessä voi olla vain harmaa kolmio.