Kenguru 2016 Student

lukiosarjan ratkaisut

Ratkaisut

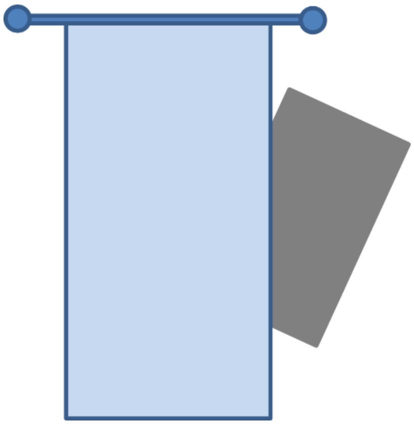
TEHTÄVÄ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
VASTAUS	A	C	E	C	A	A	B	A	D	A

TEHTÄVÄ	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
VASTAUS	A	C	B	C	B	C	D	B	E	B

TEHTÄVÄ	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
VASTAUS	D	C	C	E	E	C	E	D	C	A

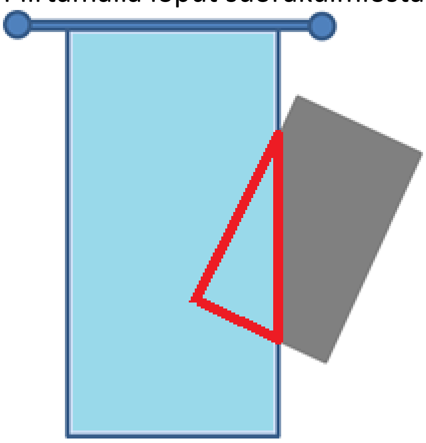
3 pistettä

1.
Suorakulmio on osittain piilossa verhon takana. Mikä muotoinen sen piilossa oleva osa on?



(A) Kolmio (B) Neliö (C) Kuusikulmio (D) Ympyrä (E) Suorakulmio

Ratkaisu:
Piirtämällä loput suorakulmiosta nähdään, että vaihtoehto A on oikein.



2.
Kuinka suuri on summa $\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}$?

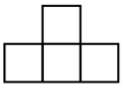
(A) $\frac{3}{111}$ (B) $\frac{111}{1110}$ **(C)** $\frac{111}{1000}$ (D) $\frac{3}{1000}$ (E) $\frac{3}{1110}$

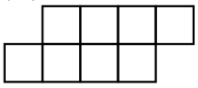
Ratkaisu:

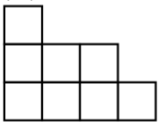
Lavennetaan samannimisiksi:

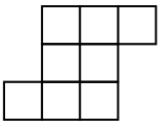
$$\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}=\frac{100}{1000}+\frac{10}{1000}+\frac{1}{1000}=\frac{111}{1000}.$$

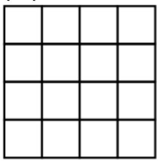
3.

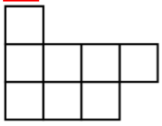
Mikä alla olevista kuvioista on **mahdotonta** rakentaa käyttämällä vain tällaisia paloja: ?

(A)


(B)


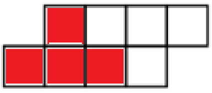
(C)


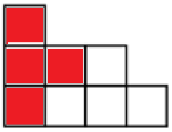
(D)


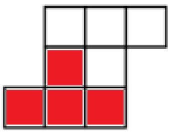
(E)


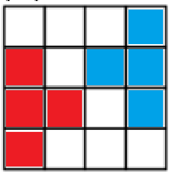
Ratkaisu:

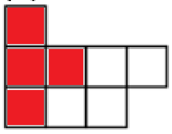
Vain kuviosta E jää väärän muotoinen pala yli.

(A)


(B)


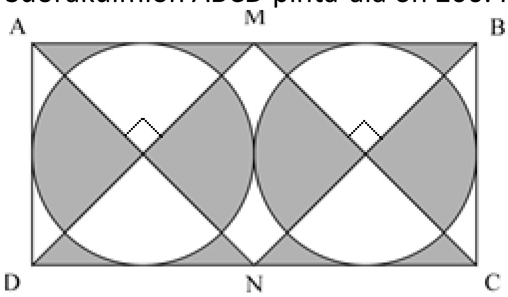
(C)


(D)


(E)


4.

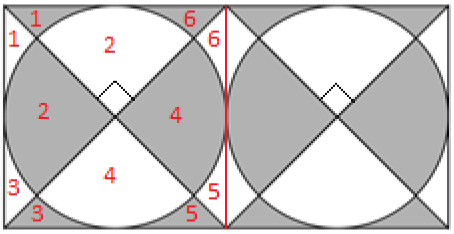
Suorakulmion *ABCD* pinta-ala on 200. Kuinka suuri on tummennettu pinta-ala?



(A) 50 (B) 80 (C) 100 (D) 120 (E) 150

Ratkaisu:

Jokaisella valkoisella palalla on samanmuotoinen ja -kokoinen tummennettu pari:



Siten tasan puolet pinta-alasta on valkoista ja puolet tummennettua. Vaihtoehto C on siis oikein.

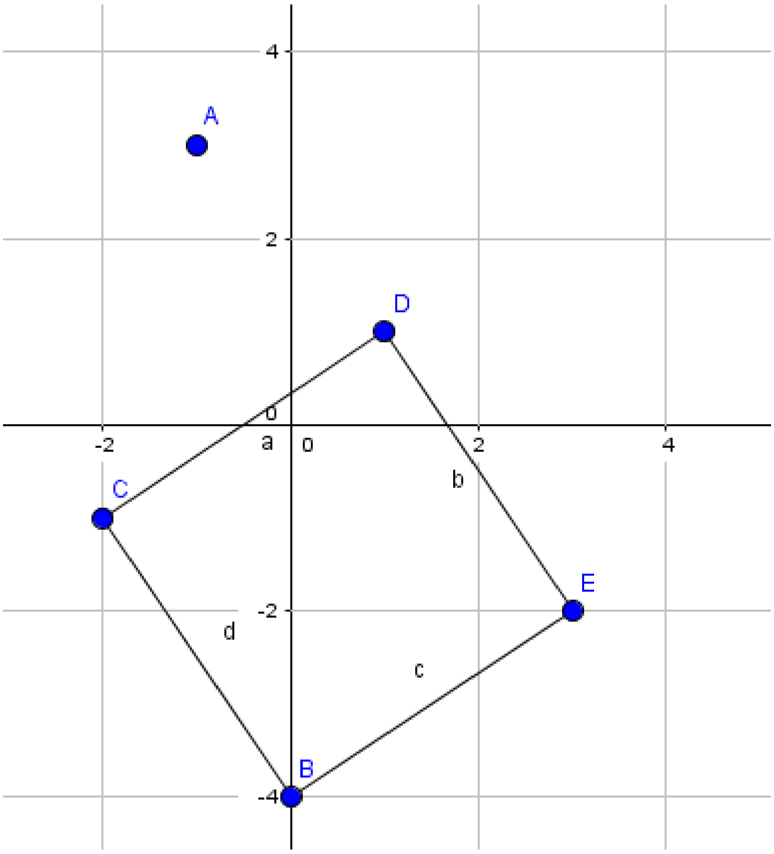
5.

Alla olevista koordinaateista neljä muodostaa neliön kärkipisteet. Mikä ei ole yksi kärkipisteistä?

(A) (-1, 3) (B) (0, -4) (C) (-2, -1) (D) (1, 1) (E) (3, -2)

Ratkaisu:

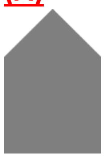
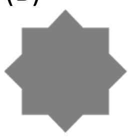
Helpointa on piirtää pisteet koordinaatistoon, jolloin käy ilmi että vastaus on A.

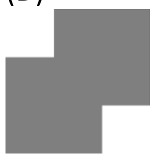


On myös mahdollista tarkistaa janojen kohtisuoruuksia esimerkiksi laskemalla kulmakertoimia, mutta se on hitaampaa.

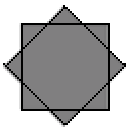
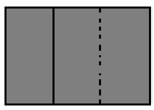
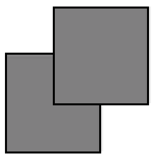
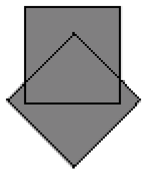
6.

Mitä kuviota ei voi muodostaa liimaamalla kahta samanlaista neliönmuotoista pahvinpalaa kiinni toisiinsa?

(A)

(B)

(C)

(D)

(E)

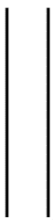

Ratkaisu: Kuviot B, C, D ja E voidaan muodostaa seuraavasti:

B:

C:

D:

E:


Kuvio A ei ole kuitenkaan mahdollinen, sillä neliön halkaisija on pidempi kuin sen sivu. Näin ollen kärjelleen käännetyn neliön kulmista vähintään kolme pilkistää toisen neliön alta, kuten huomaamme kuviosta E.

7.

Kuvissa alla on viisi jokea. Neljä niistä on tasalevyisiä (eli jokaisesta niiden rannan pisteestä on sama matka lähimmälle vastarannalle). Mikä joista ei ole tasalevyinen?

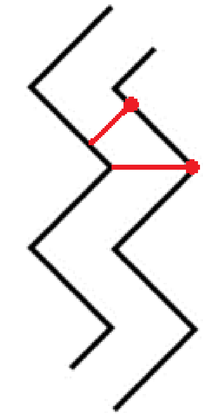
(A)

(B)

(C)

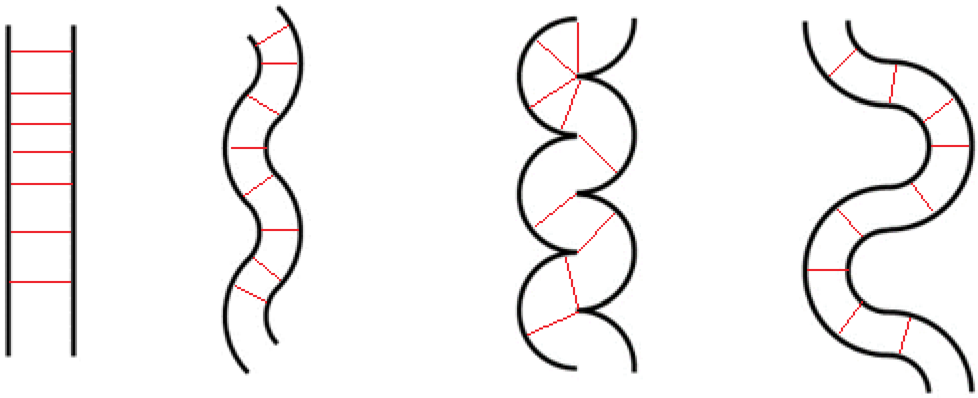
(D)

(E)


Ratkaisu:
Joki B ei ole tasalevyinen. Esimerkiksi kuvaan merkityistä kahdesta oikeanpuoleisen rannan pisteestä on eri etäisyydet vastarannalle:



Muut joet ovat tasalevyisiä:

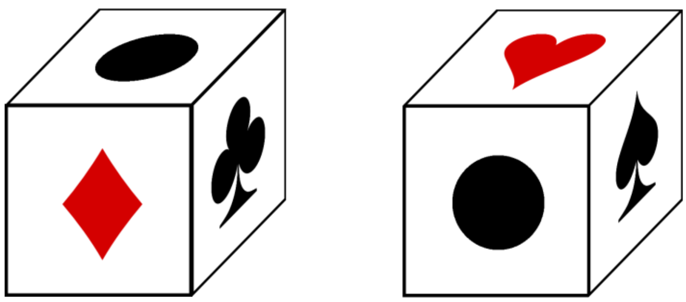


Hieman toisessa merkityksessä tasalevyisyydestä puhutaan ”tasalevyisten käyrien” yhteydessä.
https://en.wikipedia.org/wiki/Curve_of_constant_width

8.

Nopassa on seuraavat kuviot: , , , ,  ja . Jokaisella tahkolla on yksi kuvio.

Kuvassa näet nopan kahdesta eri suunnasta. Mikä kuvio on kuviota  vastapäätä?



(A) ●   (B) ♦   (C) ♥   (D) ♠   (E) ♣

Ratkaisu:

Kahdesta kuvasta nähdään, että ympyrä (●) on symbolien ♠, ♥, ♣ ja ♦ vieressä. Sen vastapuolella on siis ■, joten vastaus on ●.

9.

Mikä seuraavista luvuista on lähinnä laskun $\frac{17 \cdot 0{,}3 \cdot 2016}{999}$ tulosta?

(A) 0,01   (B) 0,1   (C) 1   **(D)** 10   (E) 100

Ratkaisu:

Karkeasti pyöristäen saadaan

$$\frac{17 \cdot 0{,}3 \cdot 2016}{999} \approx \frac{20 \cdot 0{,}3 \cdot 2000}{1000} = 20 \cdot 0{,}3 \cdot 2 = 12 \approx 10.$$

Tarkempi likiarvo olisi $\frac{17 \cdot 0{,}3 \cdot 2016}{999} = 10{,}291 \ldots$

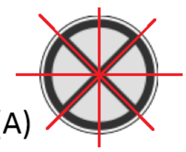
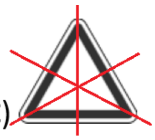
10.

Millä alla olevista liikennemerkeistä on eniten symmetria-akseleita? (Symmetria-akseli on suora, joka jakaa kuvion kahteen osaan, jotka ovat toistensa peilikuvat kyseisen suoran suhteen.)

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

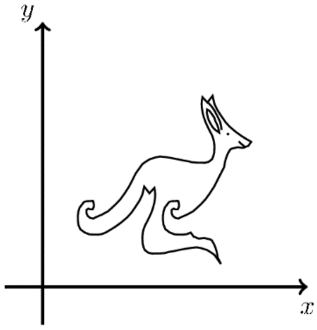
Ratkaisu:

Liikennemerkki A voittaa kahdeksalla symmetria-akselilla. Merkki D -raukalla ei ole ainuttakaan.

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

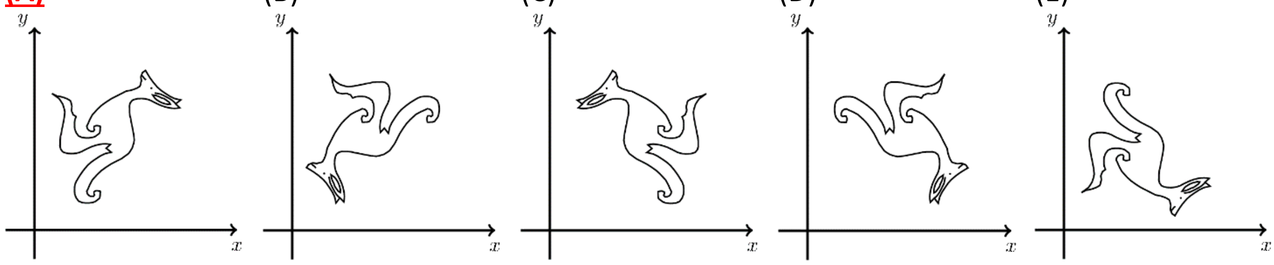
4 pistettä

11.
Alla oleva kengurun kuva koostuu joukosta *xy*-tason pisteitä.

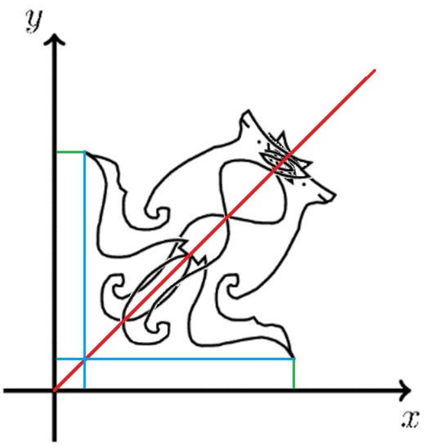


Kunkin pisteen *x*- ja *y*-koordinaatit vaihdetaan keskenään. Mikä on lopputulos?

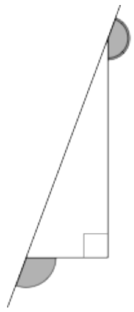
(A) (B) (C) (D) (E)



Ratkaisu:
Kun pisteen x- ja y-koordinaatit vaihdetaan, kaikki x-akselia lähellä olleet pisteet päätyvät lähelle y-akselia ja päinvastoin. (Ja suoran $y = x$ pisteet eivät liiku muunnoksessa.) Tarkemmin ajateltuna kyseessä on peilaus suoran $y = x$ suhteen. Vaihtoehto A on oikein.

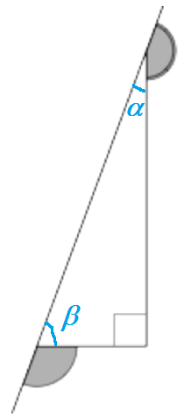


12.
Mikä on kuvaan tummalla merkittyjen kulmien summa?



(A) $150°$ (B) $180°$ **(C)** $270°$ (D) $320°$ (E) $360°$

Ratkaisu:

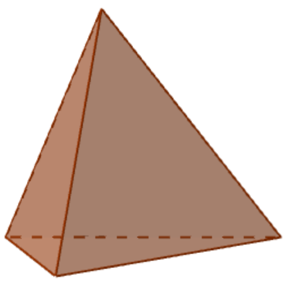


Tummalla merkityt kulmat sekä kulmat α ja β muodostavat yhteensä kaksi $180°$ kulmaa, eli $360°$. Kulmien α ja β summa on $90°$, koska ne ovat suorakulmaisen kolmion terävät kulmat. Tummien kulmien summaksi jää $360° - 90° = 270°$.

13.
Mikä on pienin määrä tasoja, joka riittää rajaamaan kolmiulotteisesta avaruudesta suljetun alueen?

(A) 3 **(B)** 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

Ratkaisu:



Neljällä tasolla saa rajattua kuvat tetraedrin muotoisen tilan. Kolme tasoa ei riitä, sillä kolmella tasolla on vain kolme leikkaussuoraa, eivätkä ne riitä muodostamaan avaruuskappaleen särmiä.

14.
Pienenä Lucas keksi oman tavan merkitä negatiivisia lukuja. Alaspäin laskien luvut merkitään

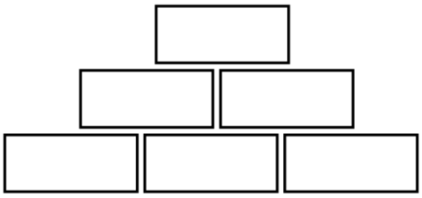
3, 2, 1, 0, 00, 000, 0000, …

Mikä olisi laskun 000 + 0000 tulos tällä merkintätavalla?

(A) 1 (B) 00000 (C) 000000 (D) 0000000 (E) 00000000

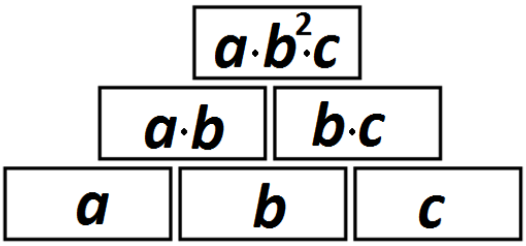
Ratkaisu:
Normaaliin merkintätapaan muutettuna saadaan 000 + 0000 = -2 + (-3) = -5. Tämä vastaa Lucaksen systeemissä merkintää 000000. Nollien määrää ei voi suoraan laskea yhteen, koska kunkin negatiivisen luvun edessä on yksi "ylimääräinen" nolla.

15.
Lukupyramidin alimpiin ruutuihin kirjoitetaan yhtä suurempia kokonaislukuja ja kuhunkin ylempään ruutuun kahden sen alla olevan luvun tulo. Mikä seuraavista luvuista **ei voi** tulla ylimpään ruutuun?



(A) 36 (B) 42 (C) 56 (D) 90 (E) 220

Ratkaisu:
Keskimmäisessä alaruudussa oleva luku tulee ylimpään tuloon tekijäksi kahdesti:

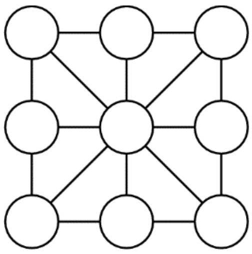


Kullakin ehdotetulla luvulla täytyy siis olla vähintään kaksi samaa yhtä suurempaa tekijää.
$36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$
$42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$ □ epäkelpo, ei kahta samaa tekijää.

$56 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7$
$90 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$
$220 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 11$

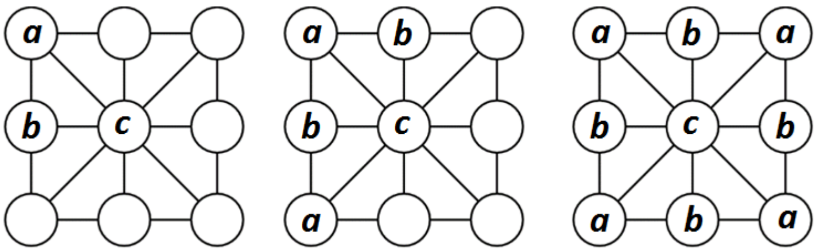
Vastaus on siis 42.

16.
Diana haluaa kirjoittaa yhdeksän kokonaislukua kuvan ympyröihin siten, että kussakin kolmen vierekkäisen ympyrän muodostamassa pikkukolmiossa lukujen summa on sama. Kuinka montaa eri lukua Diana voi korkeintaan käyttää?



(A) 1 (B) 2 **(C)** 3 (D) 5 (E) 8

Ratkaisu:
Nimetään yhden kolmion luvut: a, b ja c. Ne eivät välttämättä ole erisuuret.



Kahden vierekkäisen kolmion tyhjissä järjissä täytyy olla luvut b ja a, jotta summat olisivat samat (keskikuva). Vastaavasti voidaan täyttää koko ruudukko (viimeinen kuva). Lukuja on siis korkeintaan kolme erilaista, ja valitsemalla luvut a, b ja c erisuuriksi nähdään, että kolme erisuurta lukua on mahdollista.

17.
Positiivisille kokonaisluvuille a, b, c, d pätee

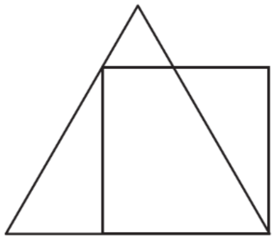
$$a + 2 = b - 2 = c \cdot 2 = d : 2.$$

Mikä luvuista a, b, c, d on suurin?

(A) a (B) b (C) c **(D)** d (E) ei voida tietää

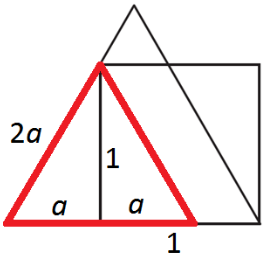
Ratkaisu:
Yhtälöstä $a + 2 = b - 2$ saadaan $b = a + 4$, eli b on suurempi kuin a. Lisäksi täytyy olla $b \geq 5$, sillä $a \geq 1$.
Yhtälöstä $c \cdot 2 = d : 2$ saadaan $d = 4c$, eli d on suurempi kuin c. (Koska c on positiivinen.)
Lopuksi saadaan yhtälöstä $b - 2 = d : 2$ ratkaistuksi $d = 2b - 4$.
Koska $b \geq 5$, saadaan lopulta $d = 2b - 4 = b + b - 4 \geq b + 1$. Suurin luku on siis d.

18.
Kuvan neliön piiri on 4. Kuinka suuri on kuvan tasasivuisen kolmion piiri?



(A) 4 (B) $3 + \sqrt{3}$ (C) 3 (D) $3 + \sqrt{2}$ (E) $4 + \sqrt{3}$

Ratkaisu:
Neliön sivu on 1. Tutkitaan kuvaan paksulla merkittyä pienempää tasasivuista kolmiota, jonka korkeusjanan on neliön sivu.

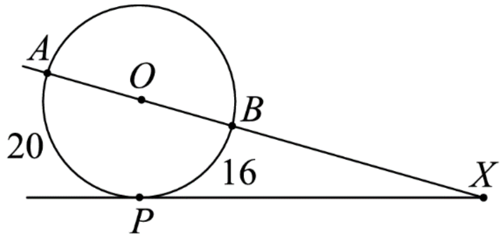


Korkeusjana puolittaa tasasivuisen kolmion kannan, joten Pythagoraan lauseella saadaan
$(2a)^2 = 1^2 + a^2$
$4a^2 = 1 + a^2$
$3a^2 = 1$
$a^2 = \frac{1}{3}$
$a = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (a > 0)$.
Kolmion piiriksi saadaan $3(1 + a) = 3 + 3a = 3 + 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 3 + \sqrt{3}$.

(Voidaan myös laskea $tan\, tan\, 60° = \frac{1}{a}$, eli $a = \frac{1}{tantan\, 60°} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, jos muistaa ulkoa $tan\, tan\, 60° = \sqrt{3}$.)

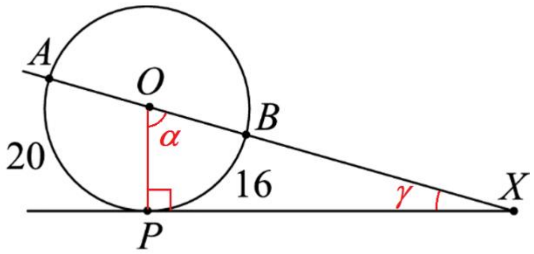
19.

Kaarien *AP* ja *BP* pituudet ovat 20 ja 16 kuvan mukaisesti. Kuinka suuri on kulma AXP ?



(A) 30° (B) 24° (C) 18° (D) 15° **(E)** 10°

Ratkaisu:
Säde *OP* on kohtisuorassa tangenttia *XP* vastaan. Merkitään kulmia kuvan mukaisesti.



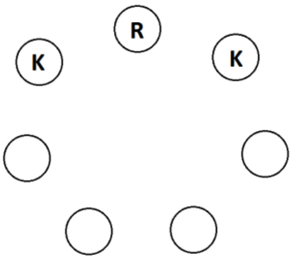
Kaaren *APB* pituus on 20 + 16 = 36. Kulman α suuruus on suoraan verrannollinen kaaren pituuteen, siis $\frac{\alpha}{180°} = \frac{16}{36} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 180° \cdot \frac{4}{9} = 20° \cdot 4 = 80°$. Kysytyn kulman γ suuruus on siis $90° - 80° = 10°$.

20.

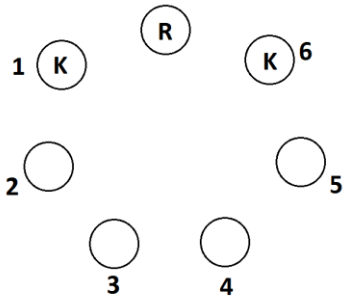
Kelmien ja ritarien saaren jokainen asukas on joko kelmi (jotka valehtelevat aina) tai ritari (jotka puhuvat aina totta). Tutkiessasi saarta tapaat seitsemän sen asukasta istumassa leirinuotion ympärillä. Heistä jokainen sanoo ”Istun kahden kelmin välissä!” Kuinka monta kelmiä nuotiolla on?

(A) 3 **(B)** 4 (C) 5 (D) 6 (E) ei voi päätellä näillä tiedoilla

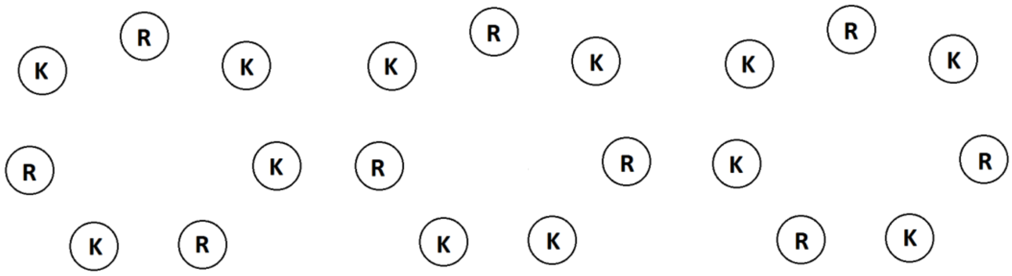
Ratkaisu:
Kolmea kelmiä ei voi istua vierekkäin, koska silloin keskimmäinen kelmi puhuisi totta. Ritareitakin täytyy siis olla. Koska ritarit puhuvat totta, ritarin kummallakin puolella on aina kelmi. Aloitetaan yhdestä ritarista:



Loputkaan eivät voi olla kelmejä, sillä silloin istuisi taas kelmi kahden muun välissä. Kuvan paikoille 2 – 5 tarvitaan vähintään kaksi ritaria, jotta kolmen mittaisia kelmijonoja ei syntyisi.



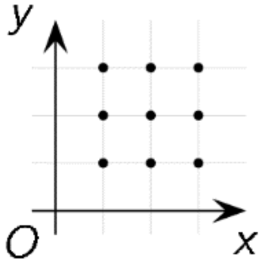
Kolmea ritaria lisää ei mahdu, koska silloin kaksi istuisi vierekkäin. Ritareita on siis yhteensä tasan kolme ja kelmejä neljä. Sijoitteluvaihtoehtoja on kolme:



Kaikki tavat ovat keskenään kiertosymmetrisiä.

5 pistettä

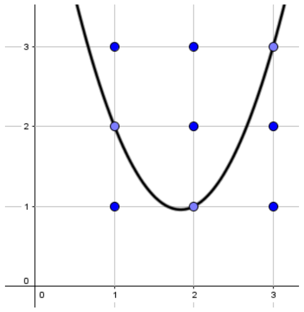
21.
Kuinka monen toisen asteen polynomin kuvaaja kulkee ainakin kolmen kuvaan merkityn pisteen kautta? Pisteet ovat tasavälein.



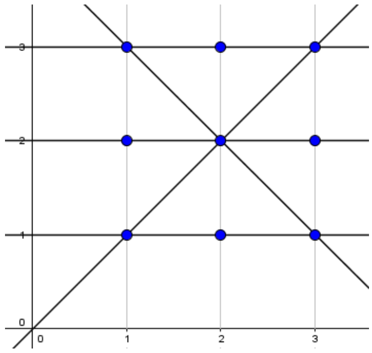
(A) 6 (B) 15 (C) 19 **(D)** 22 (E) 27

Ratkaisu:

Funktion kuvaaja ei voi kulkea kahden päällekkäisen pisteen kautta, joten on valittava yksi piste joka pystyrivistä, kuten alla.



Kolme pistettä määrää yksikäsitteisesti 2. asteen polynomin, joten jokaista pistevalintaa kohden on korkeintaan yksi kelvollinen funktio. Pisteyhdistelmiä on $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$, mutta kaikki pisteyhdistelmätkään eivät käy: Samalla suoralla olevat pisteet määrittävät suoran, ei paraabelia. Mahdollisia suoria on kolme vaakasuoraa ja kaksi vinoa.



Kysyttyjä toisen asteen polynomeja on siis 27 – 5 = 22 kappaletta.

22.

Kuinka monta eri reaalilukuratkaisua on yhtälöllä

$$(x^2-5)^{x^2-2x}=1 \qquad ?$$

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) äärettömän monta

Ratkaisu:

Yhtälöllä $a^b=1$ on ratkaisu vain jos jokin seuraavista ehdoista on voimassa:

1. $a=1$
2. $b=0$
3. $a=-1$ ja b on parillinen kokonaisluku.

Kullekin tapaukselle löytyy ratkaisuja:

$a=1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-5=1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2=6 \quad \Leftrightarrow \quad x=\pm\sqrt{6}.$

$b=0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-2x=0 \quad \Leftrightarrow \quad x(x-2)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=0\ tai\ x=2.$

$a=-1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-5=-1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2=4 \quad \Leftrightarrow \quad x=\pm 2.$

Saaduista ratkaisuista $x=2$ esiintyy kahdesti, joten ratkaisuja on yhteensä 5 kappaletta. Tarkistetaan vielä ne kaikki:

x	$\pm\sqrt{6}$	0	2	-2
$(x^2-5)^{x^2-2x}$	$1^{(\pm\sqrt{6})^2-2(\pm\sqrt{6})}$ $=1$	$(-5)^0=1$	$(-1)^0=1$	$(-1)^{(-2)^2-2\cdot(-2)}$ $=(-1)^8=1$

23.

Kuinka suuri on x_4, jos määritellään $x_1=2$ ja $x_{n+1}=x_n^{x_n}$, kun $n\geq 1$?

(A) 2^{2^3} (B) 2^{2^4} (C) $2^{2^{11}}$ (D) $2^{2^{16}}$ (E) $2^{2^{768}}$

Ratkaisu:

Huolellisesti laskemalla saadaan

$x_1 = 2$

$x_2 = x_1^{x_1} = 2^2$

$x_3 = x_2^{x_2} = (2^2)^{2^2} = (2^2)^4 = 2^8$

$x_4 = x_3^{x_3} = (2^8)^{2^8} = \left(2^{2^3}\right)^{2^8} = 2^{2^3 \cdot 2^8} = 2^{2^{3+8}} = 2^{2^{11}}$.

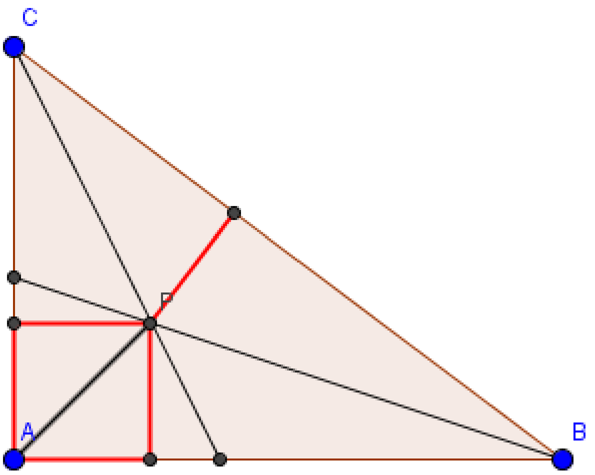
24.

Kolmiossa ABC kulma A on suora. Terävien kulmien puolittajat leikkaavat pisteessä P. Pisteen P etäisyys hypotenuusasta on $\sqrt{8}$. Kuinka suuri on pisteiden P ja A välinen etäisyys?

(A) 8 (B) 3 (C) $\sqrt{10}$ (D) $\sqrt{12}$ **(E)** 4

Ratkaisu:

Kulmanpuolittajan pisteet ovat yhtä kaukana kulman kummastakin kyljestä, joten kolmion kahden kulmanpuolittajien leikkauspiste on yhtä kaukana kaikista kolmion sivuista (koska yksi sivu on yhteinen molemmilla kulmille).



Pisteen *P* etäisyys kummastakin kateetista on siis sama $\sqrt{8}$. Pisteet *A* ja *P* sisältävässä nelikulmiossa on kolme suoraa kulmaa ja kaksi yhtä suurta vierekkäistä sivua. Se on siis neliö. Pisteiden *A* ja *P* etäisyys on neliön halkaisijan pituus x, joka voidaan ratkaista Pythagoraan lauseella:

$x^2 = \sqrt{8}^2 + \sqrt{8}^2 = 8 + 8 = 16$

$\Rightarrow\ x = 4.$

25.

Moottorivenematka tutkimusasemalta jokea alas lähimpään kylään kestää yleensä neljä tuntia ja paluumatka vastavirtaan 6 tuntia. Moottorivene on rikki. Kuinka monta tuntia matka tutkimusasemalta kylään kestää virran mukana ajelehtimalla?

(A) 5 h (B) 10 h (C) 12 h (D) 20 h (E) 24 h

Ratkaisu:

$$nopeus = \frac{matka}{aika},$$

joten

$$matka = nopeus \cdot aika.$$

Olkoon veneen nopeus tyynessä vedessä v, ja joen virtaamisnopeus u. Alavirtaan päin matkustettaessa joki nopeuttaa matkantekoa, vastavirtaan ajaessa hidastaa. Mitataan aikaa tunteina, jolloin saadaan moottorin toimiessa yhtälöt

$$matka = (v+u) \cdot 4\,h = (v-u) \cdot 6\,h.$$

Tästä ratkaistuna

$$4v + 4u = 6v - 6u \quad \Leftrightarrow \quad 10u = 2v \quad \Leftrightarrow \quad v = 5u.$$

Sijoittamalla aiempaan yhtälöön saadaan

$$matka = (v+u) \cdot 4\,h = (5u+u) \cdot 4\,h = 6u \cdot 4\,h = u \cdot 24\,h.$$

Nopeudella u matkaan menee siis 24 tuntia.

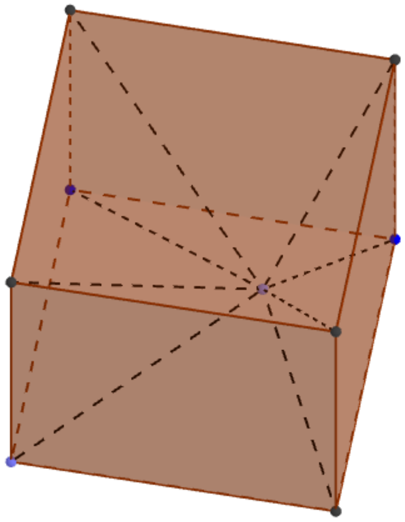
26.

Kuutio on jaettu kuuteen pyramidiin yhdistämällä eräs kuution sisäpiste janoilla kuution kärkiin. Viiden pyramidin tilavuuden ovat 2, 5, 10, 11 ja 14. Mikä on kuudennen pyramidin tilavuus?

(A) 1 (B) 4 (C) 6 (D) 9 (E) 12

Ratkaisu:

Tilanne näyttää tältä:



Kunkin pyramidin pohja on yhtä suuri: kuution tahko. Pyramidien tilavuudet ovat siis verrannolliset niiden korkeuksiin. Vastakkaisilla tahkoilla olevien pyramidien korkeuksien summa on kuution särmän verran, mikä on vakio. Siis myös vastakkaisten pyramidien tilavuuksien summan täytyy olla vakio.

Viiden tunnetun pyramidin joukosta täytyy löytyä kaksi paria, ja ainoat mahdollisuudet ovat 2 + 14 = 16 sekä 5 + 11 = 16. Yli jää tilavuus 10, joten sen parin tilavuuden täytyy olla 16 – 10 = 6.

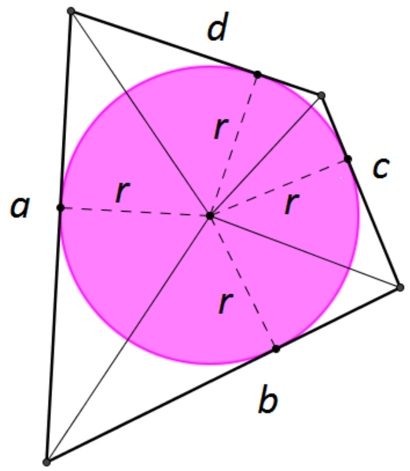
27.

Nelikulmiolla on sisään piirretty ympyrä (eli ympyrä, joka sivuaa kaikkia nelikulmion sivuja). Nelikulmion ja ympyrän piirien suhde on 4 : 3. Mikä on niiden alojen suhde?

(A) 4 : π (B) $3\sqrt{2} : \pi$ (C) 16 : 9 (D) π : 3 **(E)** 4 : 3

Ratkaisu:

Olkoon ympyrän säde *r* ja nelikulmion sivut *a*, *b*, *c* ja *d*. Ehto piirien suhteesta sanoo siis $(a + b + c + d) :\ 2\pi r = 4 : 3$.



Ympyrän keskipiste on säteen r päässä kustakin nelikulmion sivusta. Nelikulmion ala voidaan siis laskea käyttäen neljää kolmiota, joiden korkeus on r ja kanta aina yksi nelikulmion sivuista. Alojen suhteeksi saadaan

$$\frac{A_{nelikulmio}}{A_{ympyrä}} = \frac{\frac{ar}{2}+\frac{br}{2}+\frac{cr}{2}+\frac{dr}{2}}{\pi r^2} = \frac{\frac{r}{2}(a+b+c+d)}{\pi r^2} = \frac{r(a+b+c+d)}{2\pi r^2} = \frac{a+b+c+d}{2\pi r} = \frac{4}{3},$$

eli sama kuin piirien suhde.

28.

Hotellin 2016 vierasta majoittui kukin eri huoneeseen (huoneet 1 – 2016). Vieraat tapasivat aamiaisella ja osa kätteli toisiaan. Jokainen huoneiden 1 – 2015 asukas kätteli huoneensa numeron verran ihmisiä. Kuinka monta kertaa huoneen 2016 asukas kätteli?

(A) 1 (B) 504 (C) 678 (D) 1008 (E) 2015

Ratkaisu:

Oletetaan ettei kukaan kätellyt itseään.

Huoneen 2015 asukas kätteli kaikkia muita hotellivieraita (myös huoneiden 2016 ja 1 asukkeja).

Huoneen 1 asukas kätteli siis vain huoneen 2015 asukin.

Huoneen 2014 asukas kätteli kaikkia paitsi yhtä hotellivierasta. Hän ei voinut kätellä huoneen 1 asukasta, joka jo kätteli huoneen 2015 asukasta.

Vastaavasti huoneen 2013 asukas kätteli muita paitsi huoneiden 1 ja 2 asukkaita.

Päättelyä voidaan jatkaa:

⋮

1010 kätteli huoneet 1006 ja siitä ylöspäin (paitsi itsensä)

1009 kätteli huoneet 1007 ja siitä ylöspäin (paitsi itsensä)

1008 on tähän mennessä kätellyt henkilöitä 1009 – 2015, eli yhteensä 1007 henkilöä. Hänkin kätteli siis huoneen 2016 asukkaan.

Huoneen 2016 asukas kätteli huoneiden 1008 – 2015 asukkaat, eli yhteensä 2015 – 1008 + 1 = 1008 hotellivierasta.

29.

Positiivisella kokonaisluvulla *N* on tasan 6 tekijää (luvut 1 ja *N* mukaan luettuna). Viiden tekijän tulo on 648. Mikä on kuudes tekijä?

(A) 4 (B) 8 **(C)** 9 (D) 12 (E) 24

Ratkaisu:

Jaetaan luku 648 alkutekijöihinsä:

$$648 = 2\cdot 324 = 2\cdot 2\cdot 162 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 81 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 9\cdot 9 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3 = 2^3\cdot 3^4.$$

Koska 2 ja 3 ovat alkulukuja, niiden täytyy olla luvun N tekijöitä. Luvun N tekijöiksi pienimmästä suurimpaan saadaan

$$1, 2, 3, a, b, N.$$

Toisaalta täytyy olla $2\cdot b = N$ ja $3\cdot a = N$, joten tekijät voidaan luetella muodossa

$$1, 2, 3, \frac{N}{3}, \frac{N}{2}, N.$$

Puuttuva tekijä on jokin näistä kuudesta.

puuttuu 1 $\Rightarrow\ 2\cdot 3\cdot \frac{N}{2}\cdot\frac{N}{3}\cdot N = 2^3\cdot 3^4 \ \Rightarrow\ N^3 = 2^3\cdot 3^4$.

Tämä on mahdotonta, koska kolmosia ei ole kolmella jaollinen määrä.

puuttuu 2 $\Rightarrow\ 1 \cdot 3 \cdot \frac{N}{2} \cdot \frac{N}{3} \cdot N = 2^3 \cdot 3^4 \quad \Rightarrow \quad N^3 = 2^4 \cdot 3^4$.

Tämä on mahdotonta, koska kakkosia ei ole kolmella jaollinen määrä.

puuttuu 3 $\Rightarrow\ 1 \cdot 2 \cdot \frac{N}{2} \cdot \frac{N}{3} \cdot N = 2^3 \cdot 3^4 \quad \Rightarrow \quad N^3 = 2^4 \cdot 3^5$.

Tämä on mahdotonta, koska kakkosia ei ole kolmella jaollinen määrä.

puuttuu $\frac{N}{2} \Rightarrow\ 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{N}{3} \cdot N = 2^3 \cdot 3^4 \quad \Rightarrow \quad N^2 = 2^2 \cdot 3^4 \ \Rightarrow N = 2 \cdot 3^2 = 18$**.**

Tämä käy!

puuttuu $\frac{N}{3} \Rightarrow\ 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{N}{2} \cdot N = 2^3 \cdot 3^4 \quad \Rightarrow \quad N^2 = 2^3 \cdot 3^3$.

Tämä on mahdotonta, koska kakkosia ei ole parillista määrää.

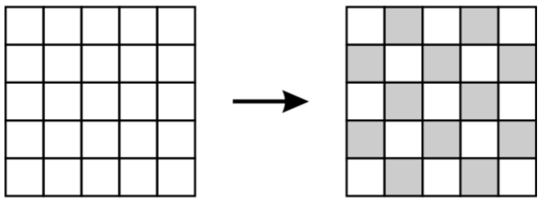
puuttuu $N \Rightarrow\ 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{N}{2} \cdot \frac{N}{3} = 2^3 \cdot 3^4 \quad \Rightarrow \quad N^2 = 2^3 \cdot 3^4$.

Tämä on mahdotonta, koska kakkosia ei ole parillista määrää

Ainoa vaihtoehto on siis $N = 18$ ja puuttuva tekijä on $\frac{N}{2} = \frac{18}{2} = 9$.

30.

Neliö on jaettu 25 pieneen ruutuun, jotka ovat aluksi kaikki valkoisia. Joka siirrolla kolme peräkkäistä ruutua voi muuttaa vastakkaisen väriseksi (valkoiset mustiksi ja mustat valkoisiksi). Kuinka monella siirrolla voidaan saada aikaan kuvan mukainen shakkilautaväritys?



(A) alle 10:llä (B) 10 (C) 12 (D) yli 12:lla (E) se on mahdotonta

Ratkaisu:

Shakkilautaväritys on mahdollista luoda kahdeksalla siirrolla. Aloitetaan ensi neljällä siirrolla reunoista ja viimeistellään neljällä siirrolla keskellä.