Student RATKAISUT

KENGURU 2022

Tehtävien ratkaisut

3 pistettä

Kysymys	1	2	3	4	5	6	7	8
Vastaus	C	D	A	C	B	B	B	B

4 pistettä

Kysymys	9	10	11	12	13	14	15	16
Vastaus	C	D	E	B	C	C	B	B

5 pistettä

Kysymys	17	18	19	20	21	22	23	24
Vastaus	D	B	B	C	D	B	C	A

Kengurulogon 2022 suunnitteli Sofia Girenko.

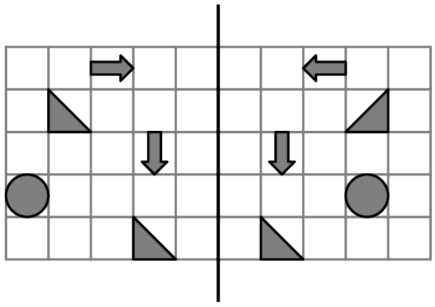
Association Kangourou sans Frontières

Maunulan yhteiskoulu
HELSINGIN MATEMATIIKKALUKIO

Teknologiateollisuuden 100-vuotissäätiö

3 pistettä

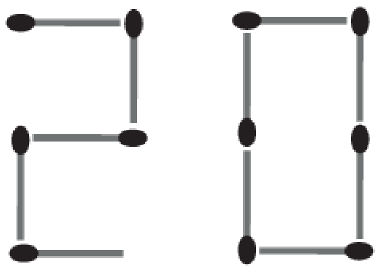
1. Paperille on piirretty kuvioita. Kun paperi taitetaan paksua viivaa pitkin, kuinka moni vasemmanpuoleisista kuvioista asettuu täsmälleen jonkin oikeanpuoleisen kuvion päälle?



A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

Ratkaisu. Kaksi kuvioista ei asetu oikein: ympyröiden etäisyydet taitosviivasta ovat erisuuret, ja samoin on alempien kolmioiden huippujen laita. Muut kolme kuvioista asettuvat täysin päällekkäin.

2. Carola muodostaa nelinumeroisen luvun 2022 tulitikuista. Hänellä on 30 tulitikkua. Hän on jo aloittanut ja muodostanut kaksi ensimmäistä numeroa, kuten kuvassa alla. Kuinka monta tulitikkua on jäljellä käyttämättä kun hän on saanut luvun 2022 valmiiksi?



A) 20 **B)** 19 **C)** 10 **D)** 9 **E)** 5

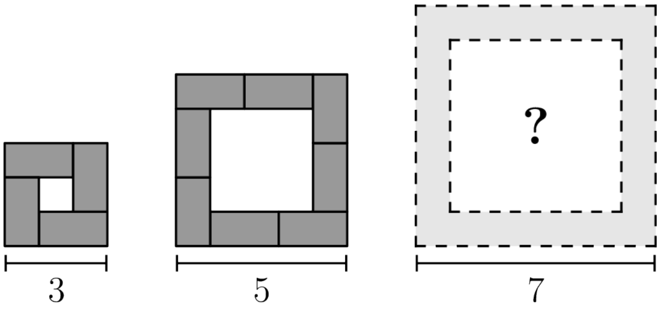
Ratkaisu. Carola tarvitsee 5 tulitikkua numeroon 2 ja 6 tulitikkua numeroon 0. Siten hän tarvitsee $3 \cdot 5 + 1 \cdot 6 = 21$ tulitikkua ja $30 - 21 = 9$ jää yli.

3. Tasasivuisen kolmion sivun pituus on 12 ja sen piiri on sama kuin neliön, jonka sivun pituus on x. Kuinka suuri on x?

A) 9 **B)** 12 **C)** 16 **D)** 24 **E)** 36

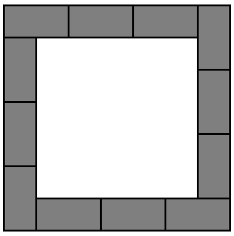
Ratkaisu. Tasasivuisen kolmion piiri on $3 \cdot 12 = 36$. Neliön piiri on $4x$. Siten $4x = 36$, mistä voimme ratkaista $x = 36/4 = 9$.

4. Katrin järjestää pöytiä, joiden mitat ovat 2×1, sen mukaan, kuinka monta henkilöä osallistuu kokoukseen. Diagrammit alla näyttävät pöytien asettelut, kun kokous on pieni, keskisuuri tai suuri. Kuinka monta pöytää tarvitaan suureen kokoukseen?

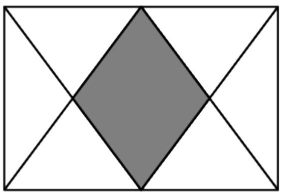


A) 10 **B)** 11 **C)** 12 **D)** 14 **E)** 16

Ratkaisu. Jokaisesta pöydästä täsmälleen yksi pitkä sivu on suurta kokousta kuvaavan asetelman ulommalla neliöllä. Toisaalta, neliön jokaisella sivulla on täsmälleen kolme pitkää pöydän sivua. Siten pöytien kokonaismäärä on $4 \cdot 3 = 12$.

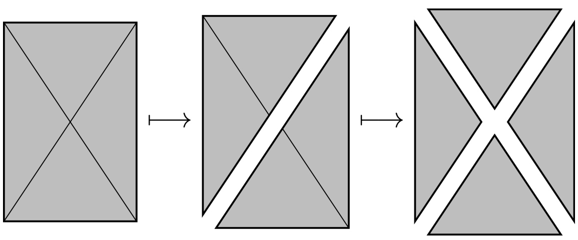


5. Suorakaiteessa pidempien sivujen keskipisteet on yhdistetty janoilla vastakkaisten sivujen päätepisteisiin, kuten kuvassa alla. Kuinka suuri osuus suorakaiteesta on varjostettu?



A) $\frac{1}{5}$ **B)** $\frac{1}{4}$ **C)** $\frac{2}{7}$ **D)** $\frac{1}{3}$ **E)** $\frac{2}{5}$

Ratkaisu. Jos yhdistämme pidempien sivujen keskipisteet janalla, suorakaide jakautuu kahdeksaan kolmioon, joiden alat ovat keskenään yhtä suuria. Tämän näkee vaikkapa toteamalla ensin, että suorakaiteen lävistäjä pilkkoo suorakaiteen kahdeksi kolmioksi, joilla on sama ala, ja toteamalla sitten, että suorakaiteen lävistäjät puolittavat toisensa, joten toisen lävistäjän puolikkaiden on pilkottava kumpikin kolmio vielä kahdeksi pienemmäksi kolmioksi, joilla on sama ala:



Siten suorakaiteen alasta on varjostettu $2/8 = 1/4$.

6. Bella on vanhempi kuin Charlie ja nuorempi kuin Lily. Theodor on vanhempi kuin Bella. Ketkä kaksi henkilöistä voisivat olla samanikäisiä?

A) Charlie ja Theodor **B)** Theodor ja Lily **C)** Lily ja Charlie
D) Bella ja Lily **E)** Theodor ja Bella

Ratkaisu. Lily ja Theodor ovat molemmat vanhempia kuin Bella, kun taas Charlie on häntä nuorempi. Siten vain Lily ja Theodor voisivat olla samanikäisiä.

7. Olen pienempi kuin puolikkaani ja suurempi kuin itseni kerrottuna kahdella. Itseni ja neliöni summa on nolla. Kuka olen?

A) -2 **B)** -1 **C)** 0 **D)** 1 **E)** 2

Ratkaisu. Merkiten kertojaa kirjaimella x, kolmas ehto kertoo, että $x+x^2=0$. Kun vasemman puolen jakaa tekijöihin, tämän yhtälön voi kirjoittaa muodossa $x(x+1)=0$. Siten x on joko 0 tai -1. Ensimmäinen ehto sulkee pois vaihtoehdon 0, joten oikea vastaus voi olla vain -1. Tälle luvulle pätevätkin epäyhtälöt $-1<-1/2$ ja $-1>-2=2\cdot(-1)$.

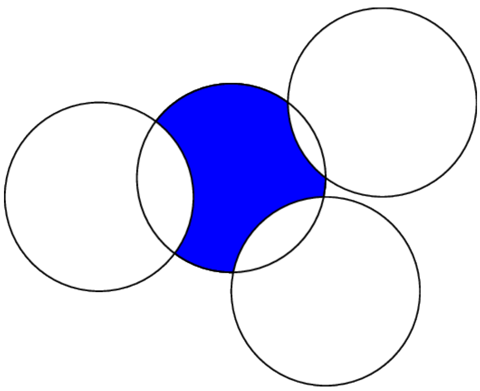
8. David kirjoittaa kasvavassa järjestyksessä luvusta 2 lukuun 2022 saakka kaikki kokonaisluvut, joissa esiintyy vain numeroita 0 ja 2. Mikä on hänen listansa keskimmäisin luku?

A) 200 **B)** 220 **C)** 222 **D)** 2000 **E)** 2002

Ratkaisu. Listan luvut ovat 2, 20, 22, 200, 202, 220, 222, 2000, 2002, 2020 ja 2022. Siten keskimmäisin luku on 220.

4 pistettä

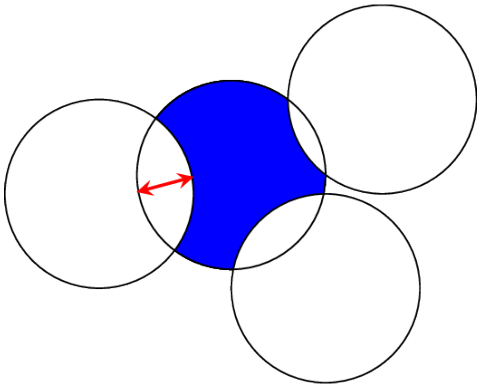
9. Neljä ympyrää, joista jokaisen säde on 1, leikkaavat toisiaan kuten kuvassa. Mikä on varjostetun alueen piiri?



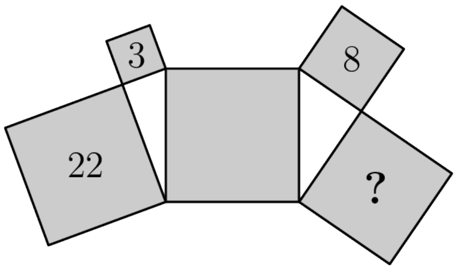
A) π **B)** $\frac{3\pi}{2}$ **C)** 2π **D)** π^2

E) Suurempi kuin $\frac{3\pi}{2}$ ja pienempi kuin 2π

Ratkaisu. On helppo vakuuttua siitä, että kahden samansäteisen ympyrän leikatessa toisen ympyrän sisältä löytyvien kaarien pituudet ovat yhtä suuret. Tästä seuraa, että varjostetun alueen piiri on sama kuin yhden ympyrän piiri, eli 2π.



10. Viisi neliötä ja kaksi suorakulmaista kolmiota sijaitsevat kuten kuvassa alla. Kolmen neliön sisällä on luvut 3, 8 ja 22 merkitsemässä niiden aloja neliömetreissä. Mikä on kysymysmerkillä varustetun neliön ala?



A) $14\,\mathrm{m}^2$ **B)** $15\,\mathrm{m}^2$ **C)** $16\,\mathrm{m}^2$ **D)** $17\,\mathrm{m}^2$ **E)** $18\,\mathrm{m}^2$

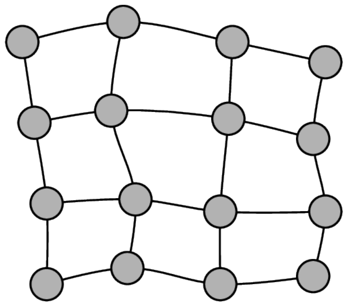
Ratkaisu. Pythagoraan lauseen nojalla keskimmäisen neliön ala neliömetreissä on toisaalta $3+22$ ja toisaalta $8+?$. Siten $? = 3+22-8 = 17$.

11. Luvut a, b ja c ovat nollasta poikkeavia reaalilukuja. Luvut $-2\,a^4\,b^3\,c^2$ ja $3\,a^3\,b^5\,c^{-4}$ ovat samanmerkkisiä. Mikä seuraavista pitää välttämättä paikkaansa?

A) $ab > 0$ **B)** $b < 0$ **C)** $c > 0$ **D)** $bc > 0$ **E)** $a < 0$

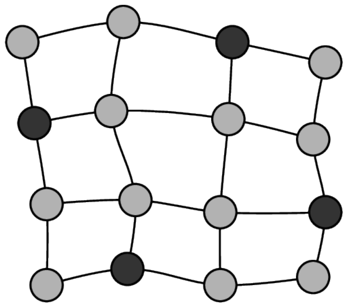
Ratkaisu. Koska nollasta poikkeavien reaalilukujen parilliset potenssit ovat positiivisia, ovat luvut a^4, b^2 ja c^2 positiivisia, joten ne voi jakaa pois ensimmäisestä lausekkeesta etumerkkiä muuttamatta. Samoin toisesta lausekkeesta voi jakaa pois potenssit a^2, b^4 ja c^{-4}. Lisäksi tekijät 2 ja 3 ovat positiivisia, joten nekään eivät muuta etumerkkiä. Siten tehtävänannon ehto yksinkertaistuu ehdoksi, että luvut $-b$ ja ab ovat samanmerkkisiä, mikä puolestaan on yhtäpitävää sen kanssa, että $a < 0$. Siten väite e) pitää välttämättä paikkaansa. Toisaalta, luvut b ja c voivat olla niin negatiivisia kuin positiivisiakin. Jos b on positiivinen ja c negatiivinen, niin $ab < 0$, $b > 0$, $c < 0$ ja $bc < 0$, jolloin väitteet a), b), c) ja d) eivät päde.

12. Alla on kartta, johon on merkitty 16 kaupunkia ja niiden väliset tiet. Hallitus haluaa rakentaa sähkölaitoksia joihinkin kaupungeista. Jokainen sähkölaitos pystyy tuottamaan energiaa omalle kaupungilleen, sekä niille kaupungeille, jotka ovat yhden tieyhteyden päässä. Mikä on pienin mahdollinen sähkölaitosten määrä, kun sähkölaitosten vaaditaan tuottavan sähköä kaikille kaupungeille?

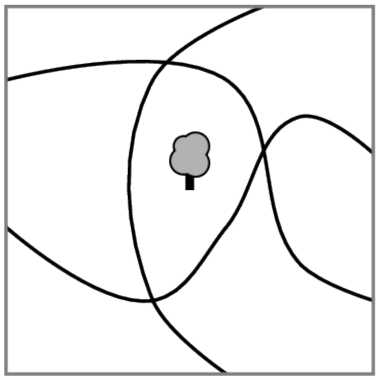


A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

Ratkaisu. Jokaisella kaupungilla on enintään neljä naapuria, joten jokainen sähkölaitos voi tuottaa sähköä enintään viidelle kaupungille. Koska $3 \cdot 5 < 16$, ei kolme sähkölaitosta voi riittää, joten niitä tarvitaan vähintään neljä. Toisaalta, neljä sähkölaitosta riittää, jos ne sijoittaa vaikkapa näin:

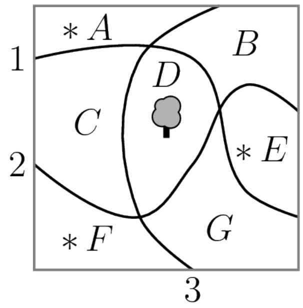


13. Puiston läpi kulkee kolme polkua. Puiston keskellä kasvaa puu, kuten kuvassa alla. Mikä on pienin määrä puita, jotka täytyy istuttaa, jos halutaan, että jokaisen polun kummallakin puolella on yhtä monta puuta?



A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

Ratkaisu. Nimeämme polkujen rajoittamat alueet kuten kuvassa alla. Tarkastellen polkua 1, ainakin yksi puu täytyy istuttaa johonkin alueista A, B ja E. Tarkastellen polkua 2 ainakin yksi puu täytyy istuttaa johonkin alueista F, G ja E. Tarkastellen polkua 3 ainakin yksi puista täytyy istuttaa johonkin alueista A, C ja F. Koska näillä aluekolmikoilla ei ole ainuttakaan yhteistä aluetta, ei yhden puun istuttaminen voi riittää. Lisäksi puita on oltava puistossa parillinen määrä, joten kaksi puuta ei myöskään riitä. Täten puita on istutettava vähintään kolme. Mutta tämä riittääkin, kun puut sijoittaa kuvassa asteriskilla $*$ merkittyihin alueisiin A, E ja F.



14. Eräässä kaupungissa jokainen asukas puhuu aina vain kysymyksin. Asukkaita on kahdenlaisia: ”positiivisia”, jotka lausuvat kysymyksiä, joihin vastaus on aina ”kyllä”, ja ”negatiivisia”, joiden kysymyksiin vastaus on aina ”ei”. Tavatessani Albertin ja Bertan, Berta kysyi minulta ”Olemmeko Albert ja minä molemmat negatiivisia?”. Minkä tyyppisiä asukkaita ovat Albert ja Berta?

A) Molemmat ovat positiivisia.

B) Molemmat ovat negatiivisia.

C) Albert on positiivinen, Berta negatiivinen.

D) Albert on negatiivinen, Berta positiivinen.

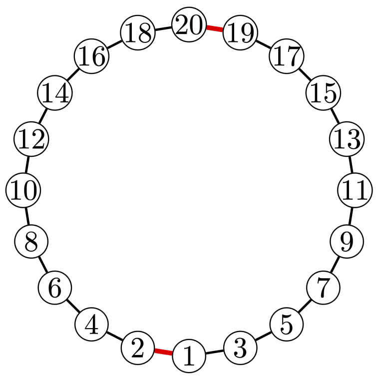
E) Annetut tiedot eivät riitä asian selvittämiseen.

Ratkaisu. On selvää, että vastaus Bertan kysymykseen ei voi olla ”kyllä”, koska tämä johtaisi ristiriitaan. Siten Berta on negatiivinen, ja vastaus hänen kysymykseensä on ”ei”. Koska nyt Albert ja Berta eivät molemmat ole negatiivisia, mutta Berta on, on Albertin oltava positiivinen.

15. Erään 20-kulmion kärjet on numeroitu luvuilla 1, 2, ..., 20 siten, että kahden vierekkäisen kärjen luvut poikkeavat toisistaan joko yhdellä tai kahdella. Väritämme 20-kulmion sivun punaisella täsmälleen silloin, kun sen kärjet poikkeavat toisistaan yhdellä. Kuinka monta punaisia sivuja on?

A) 1 **B)** 2 **C)** 5 **D)** 10 **E)** 11

Ratkaisu. Luku 1 esiintyy jossakin kärjessä. Sen naapureina täytyy olla 2 ja 3. Näiden kolmen luvun asettelun jälkeen kaikki loput kärkien numeroinnit määräytyvät yksikäsitteisesti:



Tässä on täsmälleen kaksi vierekkäistä lukuparia, jotka poikkeavat toisistaan vain yhdellä: toisaalta luvut 1 ja 2, ja toisaalta luvut 19 ja 20. Siten punaisia sivuja on kaksi kappaletta.

16. Viiden reaaliluvun keskiarvo on 24. Niistä kolmen pienimmän keskiarvo on 19 ja kolmen suurimman keskiarvo 28. Mikä on kaikkien viiden luvun mediaani?

A) 20 **B)** 21 **C)** 22 **D)** 23 **E)** 24

Ratkaisu. Olkoot kyseiset reaaliluvut kasvavassa suuruusjärjestyksessä a, b, c, d ja e. Kaikkien viiden luvun summa on $a+b+c+d+e = 5\cdot 24 = 120$. Kolmen pienimmän luvun summa on $a+b+c = 3\cdot 19 = 57$ ja kolmen suurimman luvun summa on $c+d+e = 3\cdot 28 = 84$. Siten keskimmäisin luvuista, eli c, on

$$\begin{aligned} c &= (a+b+c)+(c+d+e)-(a+b+c+d+e) \\ &= 57+84-120 = 21. \end{aligned}$$

Kysytty mediaani on siis 21.

5 pistettä

17. Mike on merkinnyt neljä pistettä A, B, C ja D suoralle tässä järjestyksessä, kuten kuvassa.

Pisteiden sijainnit ovat sellaisia, että $AC = 12\,\text{cm}$ ja $BD = 18\,\text{cm}$. Mikä on janojen AB ja CD keskipisteiden välinen etäisyys?

A) 6 cm **B)** 9 cm **C)** 12 cm **D)** 15 cm **E)** 18 cm

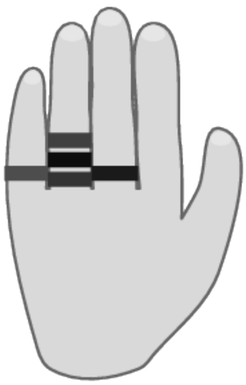
Ratkaisu. Aloitamme toteamalla, että

$$\begin{aligned} AB+BC+6\,\text{cm} &= AC+6\,\text{cm} = 12\,\text{cm}+6\,\text{cm} \\ &= 18\,\text{cm} = BD = BC+CD, \end{aligned}$$

mistä seuraa, että $CD = AB+6\,\text{cm}$. Kysytty keskipisteiden välinen etäisyys on tällöin

$$\begin{aligned} \frac{AB}{2}+BC+\frac{CD}{2} &= \frac{AB}{2}+BC+\frac{AB+6\,\text{cm}}{2} \\ &= AB+BC+3\,\text{cm} \\ &= 12\,\text{cm}+3\,\text{cm} = 15\,\text{cm}. \end{aligned}$$

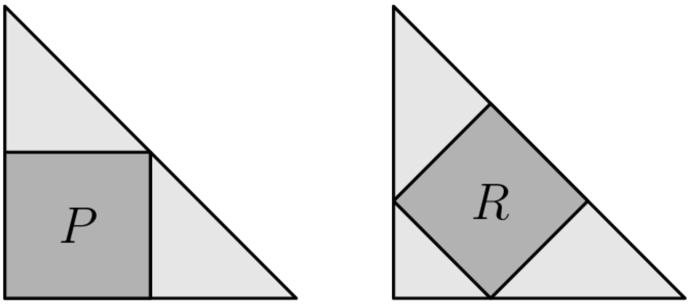
18. Henkilöllä on kädessään viisi sormusta, kuten kuvassa alla. Hän ottaa ne pois yksi kerrallaan. Kuinka monessa eri järjestyksessä hän voi tehdä niin?



A) 16 **B)** 20 **C)** 24 **D)** 30 **E)** 45

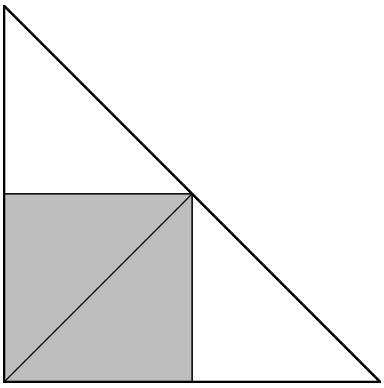
Ratkaisu. Hänen täytyy ottaa nimettömänsä kolme sormusta pois yhdessä tietyssä järjestyksessä. Olkoot nämä sormukset A, B ja C. Hän voi ottaa pikkusormensa sormuksen ennen sormusta A, sormusten A ja B välissä, sormusten B ja C välissä, tai sormuksen C jälkeen. Näitä tapauksia on siis neljä erilaista. Kussakin näistä tapauksista hän voi ottaa keskisormensa sormuksen pois viidessä eri kohtaa prosessia. Siten hän voi ottaa sormuksensa pois $4 \cdot 5 = 20$ eri järjestyksessä.

19. Kahden yhtenevän tasakylkisen suorakulmaisen kolmion sisälle on piirretty neliöt, kuten kuvassa alla. Kirjaimella P merkityn neliön ala on 45. Mikä on kirjaimella R merkityn neliön ala?

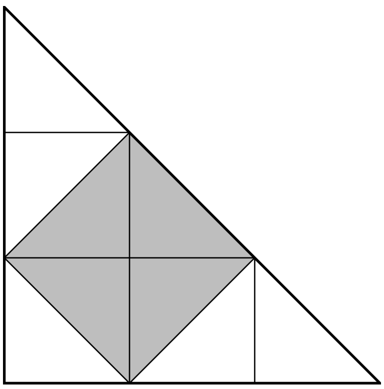


A) 35 **B)** 40 **C)** 45 **D)** 50 **E)** 60

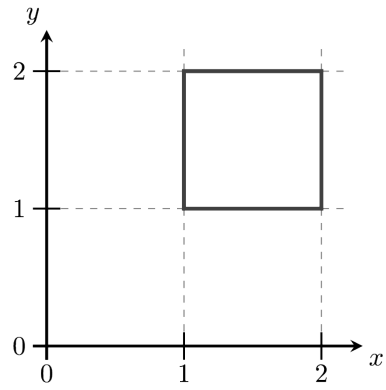
Ratkaisu. Aloitamme pilkkomalla neliön P lävistäjällä kahdeksi kolmioksi. Nyt tasakylkinen suorakulmainen kolmio on pilkottu neljäksi yhteneväksi kolmioksi, joista P sisältää kaksi. Siten ison kolmion ala on $2 \cdot 45 = 90$.



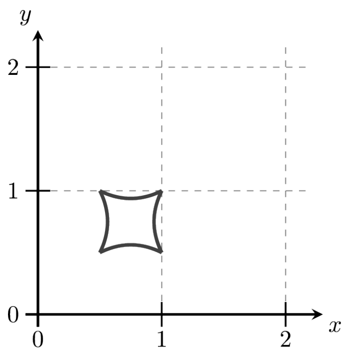
Jos sitten pilkomme oikeanpuoleisessa kolmiossa neliön R kahdella lävistäjällä neljäksi kolmioksi ja ylimmän ja oikeanpuoleisen kolmion korkeusjanoilla kahdeksi yhteneväksi pieneksi kolmioksi, on oikeanpuoleinen iso kolmio pilkottu yhdeksäksi keskenään yhteneväksi pieneksi kolmioksi, joista R sisältää neljä. Siten neliön R alan on oltava $4 \cdot 90/9 = 40$.

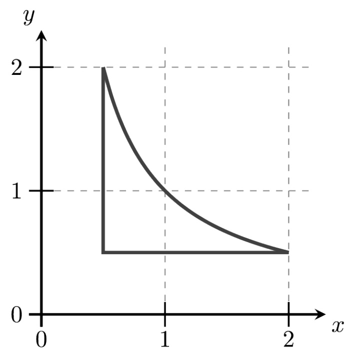


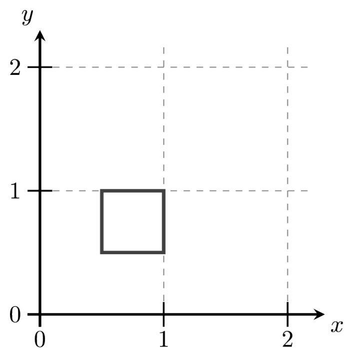
20. Koordinaatistossa on neliö, kuten kuvassa.

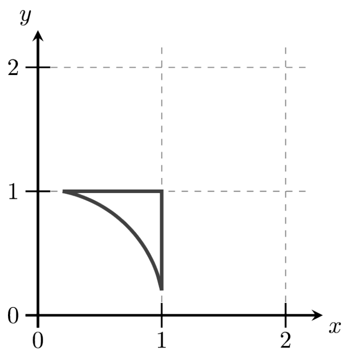


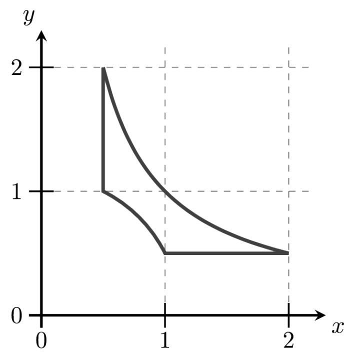
Jokainen neliön piste (x, y) siirretään pisteeseen $\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$. Miltä näin syntyvä kuvio näyttää?

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

Ratkaisu. Neliön kärjet kuvautuvat näin:

$$\begin{cases} (1,1) \longmapsto (1,1), \\ (1,2) \longmapsto (1,1/2), \\ (2,1) \longmapsto (1/2,1), \\ (2,2) \longmapsto (1/2,1/2). \end{cases}$$

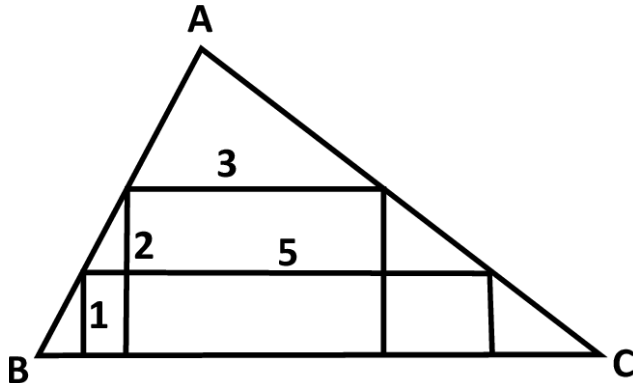
Koska jokaisessa neliön sivussa joko x-koordinaatti tai y-koordinaatti on vakio, kuvautuvat neliön sivut pysty- tai vaakasuoriksi janoiksi. Syntyvä kuvio on siis myös neliö, ja c) on oikea vastaus.

21. Joukkio merirosvoja jakoi keskenään aarteen, joka koostui 200 kultarahasta ja 600 hopearahasta. Jokainen päällystön jäsen sai 5 kultarahaa ja 10 hopearahaa. Jokainen miehistön jäsen sai 3 kultarahaa ja 8 hopearahaa. Jokainen hyttipoika sai 1 kultarahan ja 6 hopearahaa. Muita merirosvoja ei ollut. Kuinka monta merirosvoja oli?

A) 50 **B)** 60 **C)** 72 **D)** 80 **E)** 90

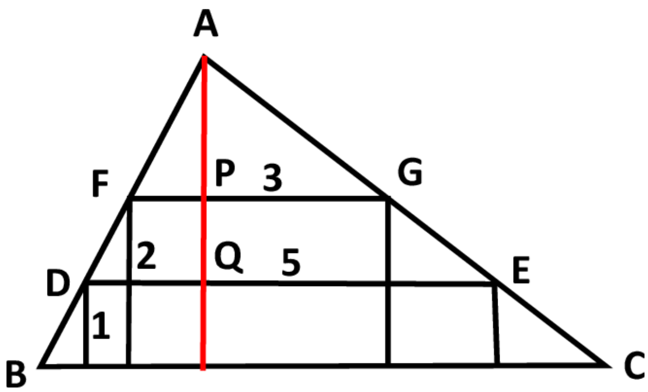
Ratkaisu. Jokainen merirosvo sai hopearahoja 5 kappaletta enemmän kuin kultarahoja. Jos merirosvoja oli N kappaletta, niin hopearahojen ja kultarahojen lukumäärien erotuksen on oltava $5N$, eli $5N = 600 - 200 = 400$. Täten $N = 400/5 = 80$.

22. Kolmion ABC sisälle piirretään kaksi suorakaidetta, joiden mitat ovat 1×5 ja 2×3, kuten kuvassa alla. Mikä on kolmion sivua BC vasten piirretyn korkeusjanan pituus?



A) 3 **B)** $\frac{7}{2}$ **C)** $\frac{8}{3}$ **D)** $\frac{16}{5}$ **E)** π

Ratkaisu. Nimetkäämme pisteet D, E, F, G, P ja Q, kuten kuvassa alla. Kolmioiden AFG ja ADE yhdenmuotoisuudesta seuraa, että $AP : FG = AQ : DE$. Jos merkitsemme kysyttyä korkeutta kirjaimella h, on siis $\frac{h-2}{3} = \frac{h-1}{5}$. Tämä on ensimmäisen asteen yhtälö, jonka ainoa ratkaisu on $h = \frac{7}{2}$.



23. Olkoon N positiivinen kokonaisluku. Kuinka monta kokonaislukua löytyy lukujen $\sqrt{N^2+N+1}$ ja $\sqrt{9N^2+N+1}$ välistä?

A) $N+1$ **B)** $2N-1$ **C)** $2N$ **D)** $2N+1$ **E)** $3N$

Ratkaisu. Koska

$$\begin{aligned} N = \sqrt{N^2} &< \sqrt{N^2+N+1} \\ &< \sqrt{N^2+2N+1} = \sqrt{(N+1)^2} = N+1, \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} 3N = \sqrt{(3N)^2} &= \sqrt{9N^2} \\ &< \sqrt{9N^2+N+1} < \sqrt{9N^2+6N+1} \\ &= \sqrt{(3N+1)^2} = 3N+1, \end{aligned}$$

välistä löytyvät kokonaisluvut ovat $N+1$, $N+2$, ..., $3N$, joten niitä on $2N$ kappaletta.

24. Kuinka moni kolminumeroinen positiivinen kokonaisluku on viisi kertaa numeroidensa tulon suuruinen?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

Ratkaisu. Olkoon N halutunlainen luku. Koska N on jaollinen viidellä, on sen viimeisen numeron oltava 0 tai 5. Jos viimeinen numero olisi 0, olisi numeroiden tulo 0, mikä ei käy. Siten viimeisen numeron on oltava 5. Tästä seuraa, että N on pariton, mistä edelleen seuraa, että sen jokainen numero on pariton. Luvun N numeroiden tulo on viidellä jaollinen, ja kun numeroiden tulo kerrotaan viidellä, on lopputulos jaollinen luvulla 25. Pariton luvulla 25 jaollinen positiivinen kokonaisluku päättyy joko numeroihin 25 tai numeroihin 75. Koska luvussa N esiintyy vain parittomia numeroita, päättyy se siis numeroihin 75. Nyt jäljellä ovat vain luvut 175, 375, 575, 775 ja 975, jotka voi helposti käydä läpi yksitellen. Koska

$$\begin{cases} 5\cdot 1\cdot 7\cdot 5 = 175, \\ 5\cdot 3\cdot 7\cdot 5 = 525 \neq 375, \\ 5\cdot 5\cdot 7\cdot 5 = 875 \neq 575, \\ 5\cdot 7\cdot 7\cdot 5 = 1225 \neq 775, \\ 5\cdot 9\cdot 7\cdot 5 = 1575 \neq 975, \end{cases}$$

on 175 ainoa halutunlainen luku.